SCAD++. О перспективах решения задач с учетом физической нелинейности

С. Ю. Фиалко

Технический университет «Краковская Политехника»

sergiy.fialko@gmail.com

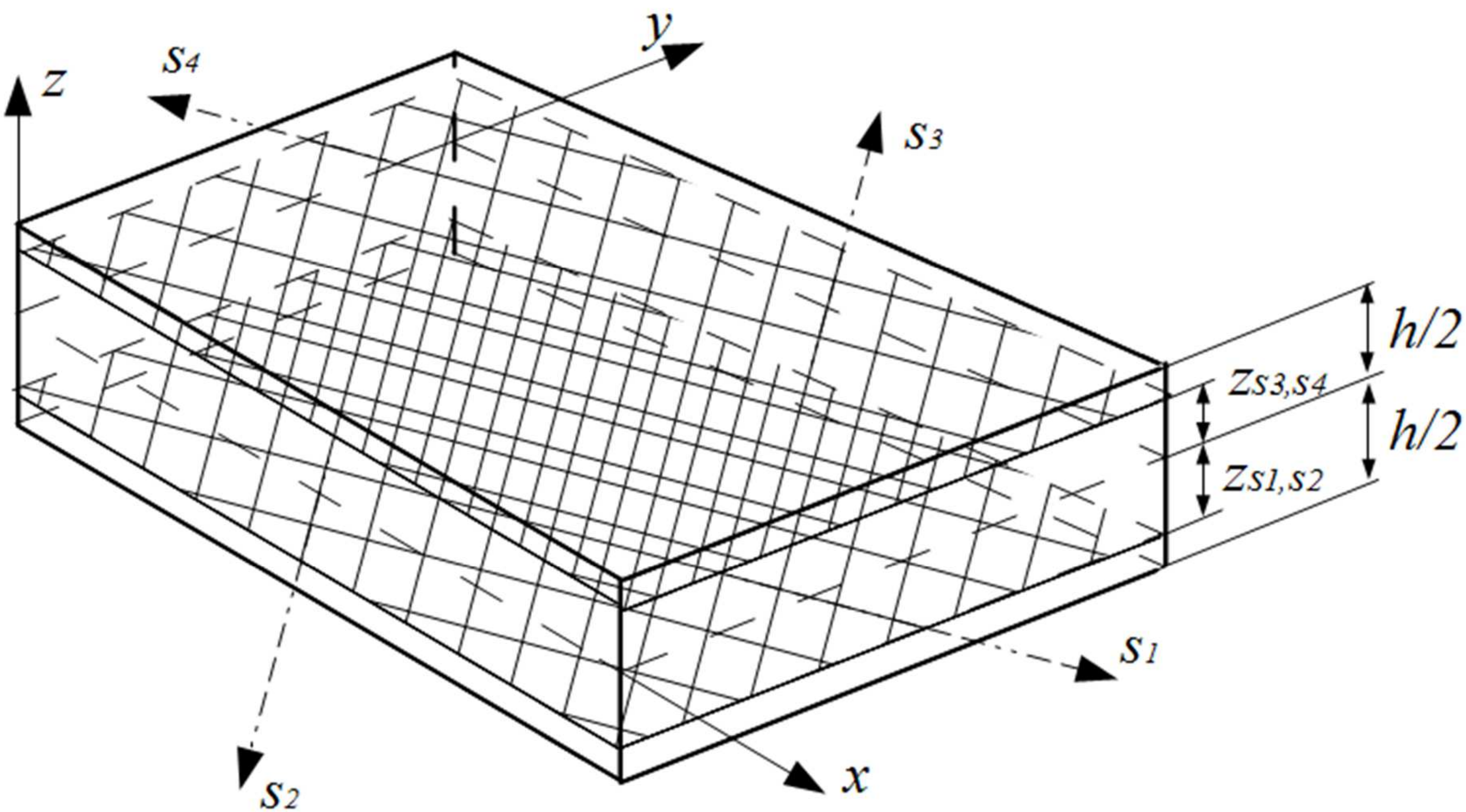
Постановка задачи

- **В данной работе предлагается четырехузловой изопараметрический конечный элемент, позволяющий моделировать процесс деформирования тонкостенных железобетонных элементов конструкций – фундаментных плит, плит перекрытий, несущих стен, пилонов и т. д.**

- **Бетон представляется изотропным материалом, поведение которого описывается соотношениями деформационной теории пластичности с элементами деградации, сформулированной в терминах остаточных деформаций.**

- **Арматура моделируется бесконечно тонким слоем, работающим на растяжение-сжатие в направлении осей арматурных стержней. Проскальзывание между арматурой и бетоном отсутствует.**

- **Используется теория оболочек средней толщины Миндлина – Рейсснера. Деформации и углы поворота считаются малыми.**



s_1, s_2 – направления укладки нижней арматуры; s_3, s_4 – верхней.

z_{s1}, z_{s2} – расстояние от срединной поверхности до соответствующего слоя верхней арматуры, z_{s3}, z_{s4} – нижней.

h - толщина плиты.

$Oxyz$ – локальная система координат конечного элемента.

Бетон

Тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\big|_{=0}\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Приведенные напряжения:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)}$$

Тензор деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

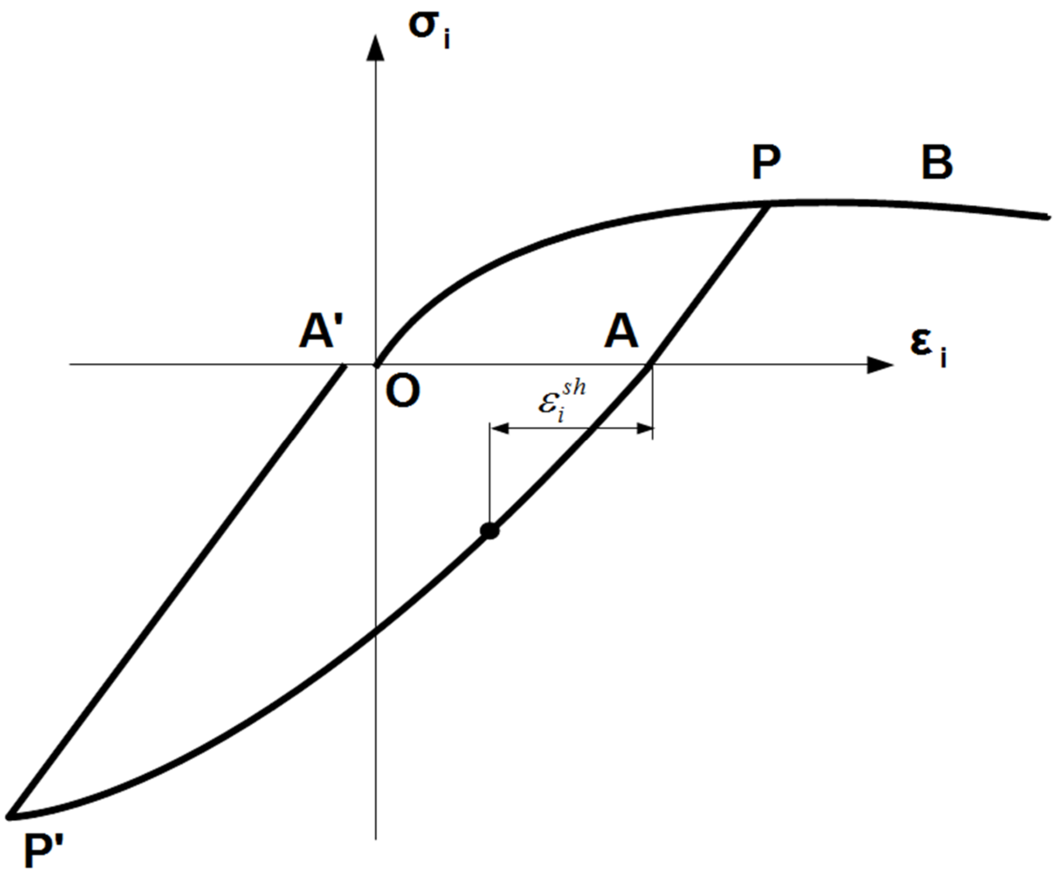
$$\sigma_z = 0 = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$

Приведенные деформации:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2}\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2\right) - \frac{1-4\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2}\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)}$$

Диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$ (бетон):



ОР – активное нагружение.
(текущий шаг: $\varepsilon i \geq \varepsilon_P$, $\varepsilon_P \leftarrow \varepsilon i$**).**

Р – начало разгрузки
РА – разгрузка
($\varepsilon i < \varepsilon_P$, *Р – «заморожено».*
Если $\varepsilon_A < \varepsilon i < \varepsilon_P$ *и* εi *возрастает, движемся по траектории АР, Р – «заморожено».*
Если далее $\varepsilon i \geq \varepsilon_P$, *активное нагружение – траектория* **РВ**, $\varepsilon_P \leftarrow \varepsilon i$ **).**

АР′ – активное нагружение другого знака ($\varepsilon i < \varepsilon_A$**).**

Р′А′ – разгрузка.

А, А′ – точки вычисления остаточных напряжений.

Диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$ (бетон):

Аппроксимация Паде билинейной диаграммы

$$\sigma(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(E\varepsilon_1+E_1\varepsilon)}{\varepsilon+\varepsilon_1}\Big|\ \varepsilon\ge 0,\\ \dfrac{\varepsilon(E\varepsilon_2+E_2\varepsilon)}{\varepsilon+\varepsilon_2}\Big|\ \varepsilon<0\end{cases}$$

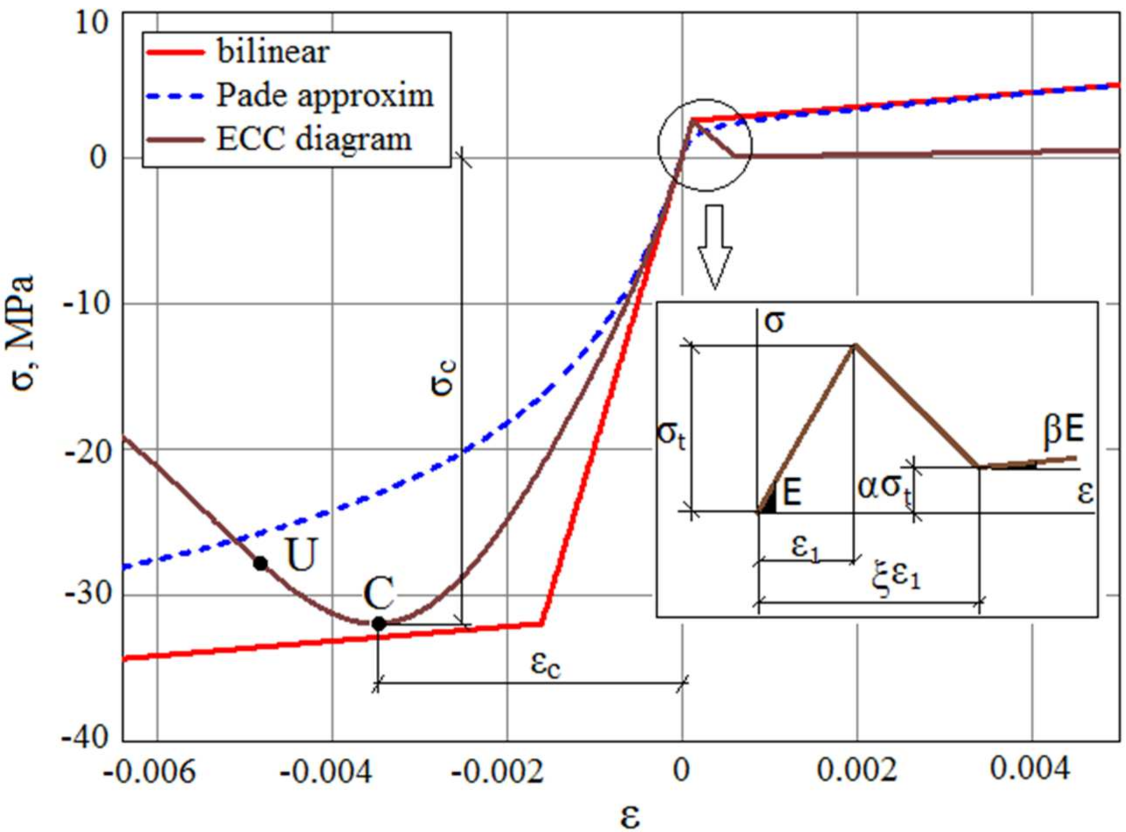


Диаграмма ЕКБ

$$\sigma(\varepsilon)=\begin{cases}E\varepsilon\big|\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_1,\\ \alpha\sigma_t+\dfrac{(1-\alpha)E}{1-\xi}(\varepsilon-\xi\varepsilon_1)\big|\ \varepsilon_1\le\varepsilon\le\xi\varepsilon_1,\ \xi>1,\\ \alpha\sigma_t+\beta E(\varepsilon-\xi\varepsilon_1)\big|\varepsilon>\xi\varepsilon_1,\\ \dfrac{\dfrac{E}{E_s}\varepsilon_s\sigma_c}{1+A\varepsilon_s+B\varepsilon_s^2+C\varepsilon_s^3}\Big|\ \varepsilon_{ul}\le\varepsilon<0\end{cases}$$

σ_c, σ_t – предел прочности бетона на сжатие и растяжение,
ε_c, ε_1 – соответствующие им деформации.
U – точка, соответствующая предельным деформациям бетона на сжатие.

- **Активное нагружение (бетон):**

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = D(\varepsilon_i)(\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_A) \\ \vec{\tau} = D_{sh}(\varepsilon_i)(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_A) \end{cases},$$

$$D(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i^{sh}} \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{2\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{sh}(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i^{sh}} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\varepsilon}_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^A \\ \varepsilon_y^A \\ \gamma_{xy}^A \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}_A = \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^A \\ \gamma_{yz}^A \end{pmatrix}$$

- **Приведенная деформация:**

$$\varepsilon_i^{sh} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2}\left(\bar{\varepsilon}_x^2+\bar{\varepsilon}_y^2\right)-\frac{1-4\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2}\bar{\varepsilon}_x\bar{\varepsilon}_y+\frac{1}{4}\left(\bar{\gamma}_{xy}^2+\bar{\gamma}_{xz}^2+\bar{\gamma}_{yz}^2\right)},$$

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - \varepsilon_x^A,\quad \bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y - \varepsilon_y^A,\quad \bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^A,\quad \bar{\gamma}_{xz} = \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^A,$$

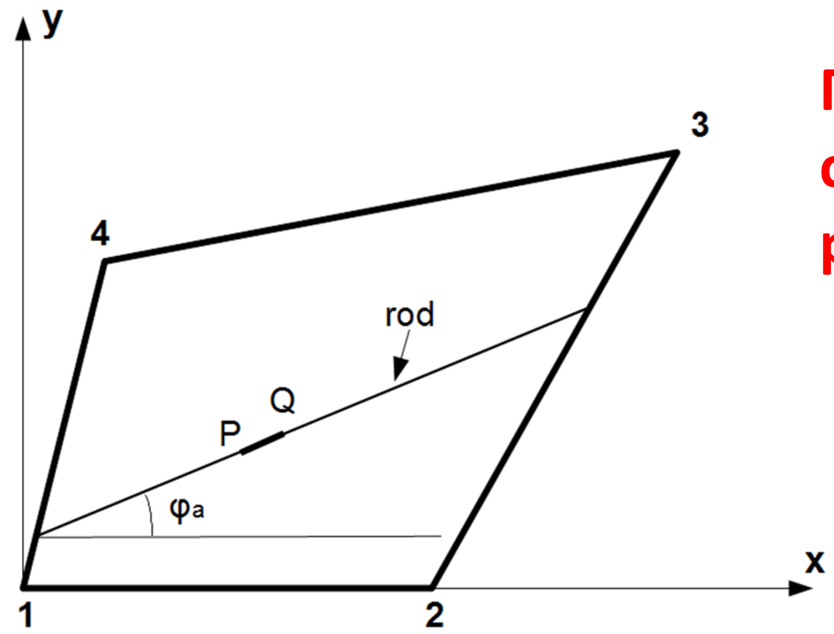
$$\bar{\gamma}_{yz} = \gamma_{yz} - \gamma_{yz}^A$$

- **Разгрузка (бетон):**

$$\begin{cases}\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{un} + D_{el}\vec{\varepsilon}\\ \vec{\tau} = \vec{\tau}_{un} + D_{el}^{sh}\vec{\gamma}\end{cases},\qquad \vec{\sigma}_{un} = \begin{pmatrix}\sigma_x^P - \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x^P + \nu\varepsilon_y^P\right)\\[2ex] \sigma_y^P - \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y^P + \nu\varepsilon_x^P\right)\\[2ex] \tau_{xy}^P - G\gamma_{xy}^P\end{pmatrix},\qquad \vec{\tau}_{un} = \begin{pmatrix}\tau_{xz}^P - G\gamma_{xz}^P\\ \tau_{yz}^P - G\gamma_{yz}^P\end{pmatrix}$$

$$D_{el} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad D_{el}^{sh} = \begin{pmatrix} kG & 0 \\ 0 & kG \end{pmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5}{6}$$

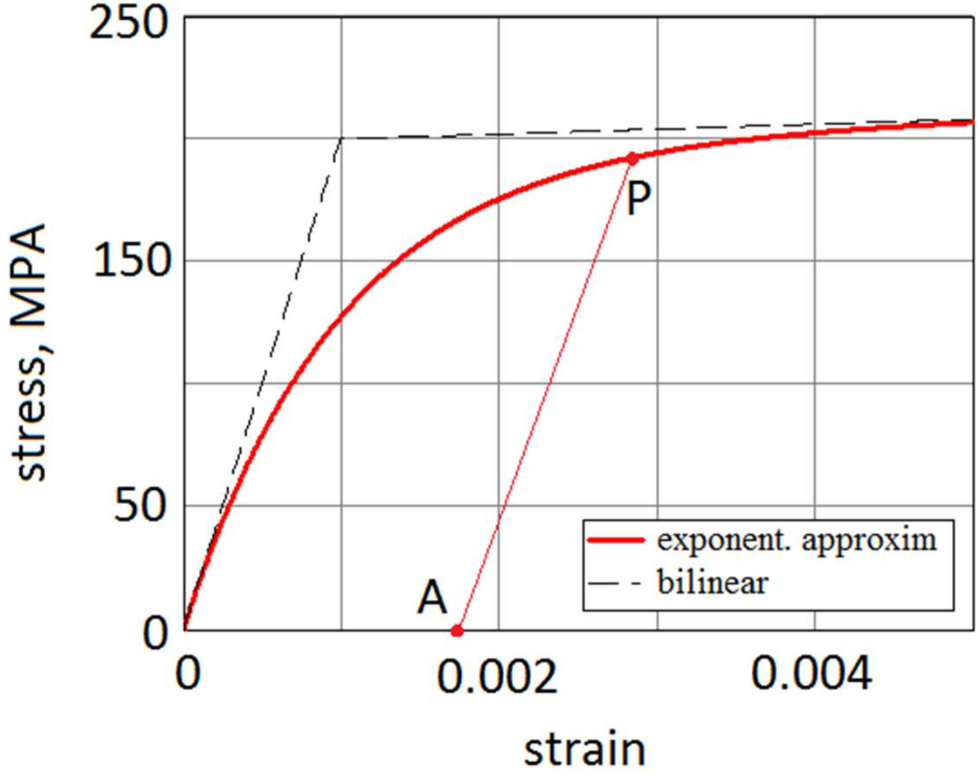
Арматура.



Предполагаем, что арматурные стержни работают только на растяжение-сжатие.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2 \varphi_a + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_a$$

- **Поскольку при реальном армировании и густоте сетки на каждый конечный элемент приходится большое к-во стержней, а функции формы обладают медленной изменяемостью в переделах КЭ, мы заменяем дискретные стержни равномерно «размазанным» «арматурным слоем». Математически это выражается в замене конечных сумм интегралом по площади КЭ.**



Экспоненциальная аппроксимация билинейной диаграммы:

$$\sigma_s = \left(E\lambda^{-1} + E_1\varepsilon_s\right)\left(1 - e^{-\lambda\varepsilon_s}\right), \qquad \lambda = E^2/\left[\sigma_y\left(E - E_1\right)\right]$$

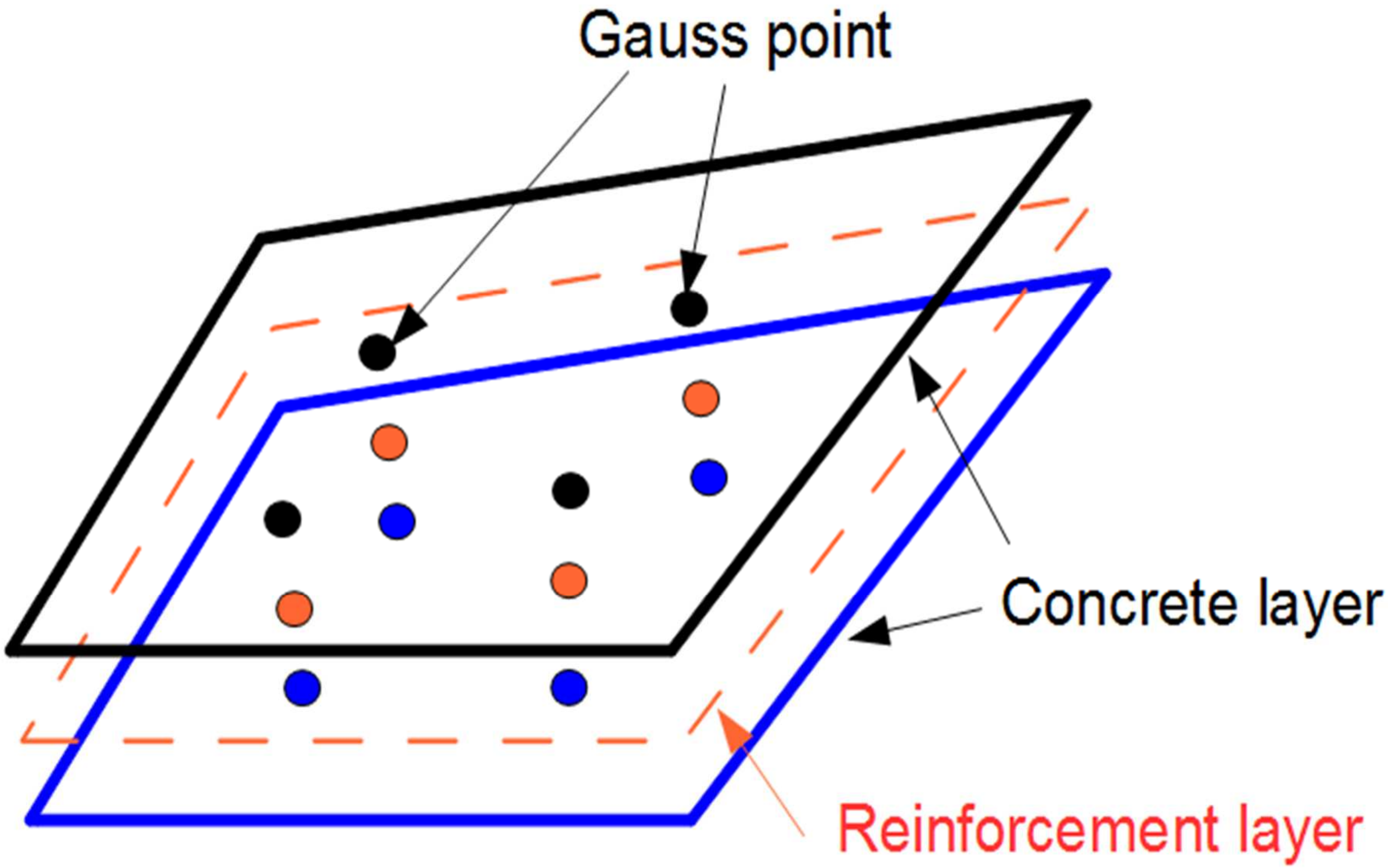
Активное нагружение: $$\sigma_s = E_s\left(\varepsilon_s\right)\cdot\left(\varepsilon_s - \varepsilon_A^s\right)$$

Разгрузка: $$\sigma_s = \sigma_{un}^s + E_s\varepsilon_s \; , \quad \sigma_{un}^s = \sigma_P^s - E_s\varepsilon_P^s$$

Для получения уравнения равновесия на уровне конечного элемента используется принцип возможных перемещений:

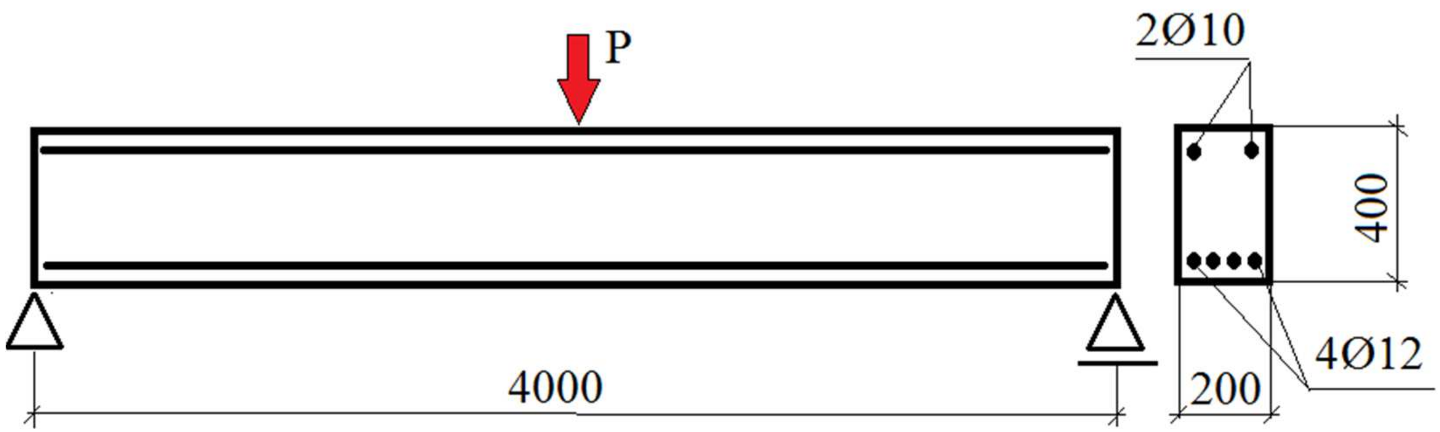
$$\underbrace{\iint\limits_{\Omega}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\delta\vec{\varepsilon}^{T}\cdot\vec{\sigma}+\delta\vec{\gamma}^{T}\cdot\vec{\tau}\right)dz\,d\Omega}_{Virtual\ work\ for\ concrete}+\underbrace{\sum_{s}\iint\limits_{\Omega}\frac{A_s}{h_s}\sigma_s\delta\varepsilon_s\left(z_s\right)d\Omega}_{\substack{Virtual\ work\ for\ steel\ rods\\ s-number\ of\ layer}}-\underbrace{\delta A_{ext}}_{Virtual\ work\ for\ external\ loads}=0$$

- **При вычислении интегралов по толщине оболочки применяется метод трапеций. В результате оболочка по толщине разбивается на слои.**
- **Интегралы по площади КЭ вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса-Лежандра. Используется изопараметрическое преобразование.**
- **Физико-механические характеристики бетона и арматуры для текущего этапа нагружения определяются в каждой точке Гаусса для каждого слоя бетона и арматурных слоев.**


Gauss point
Concrete layer
Reinforcement layer

Пример 1. Балка прямоугольного сечения под действием сосредоточенной силы посреди пролета.

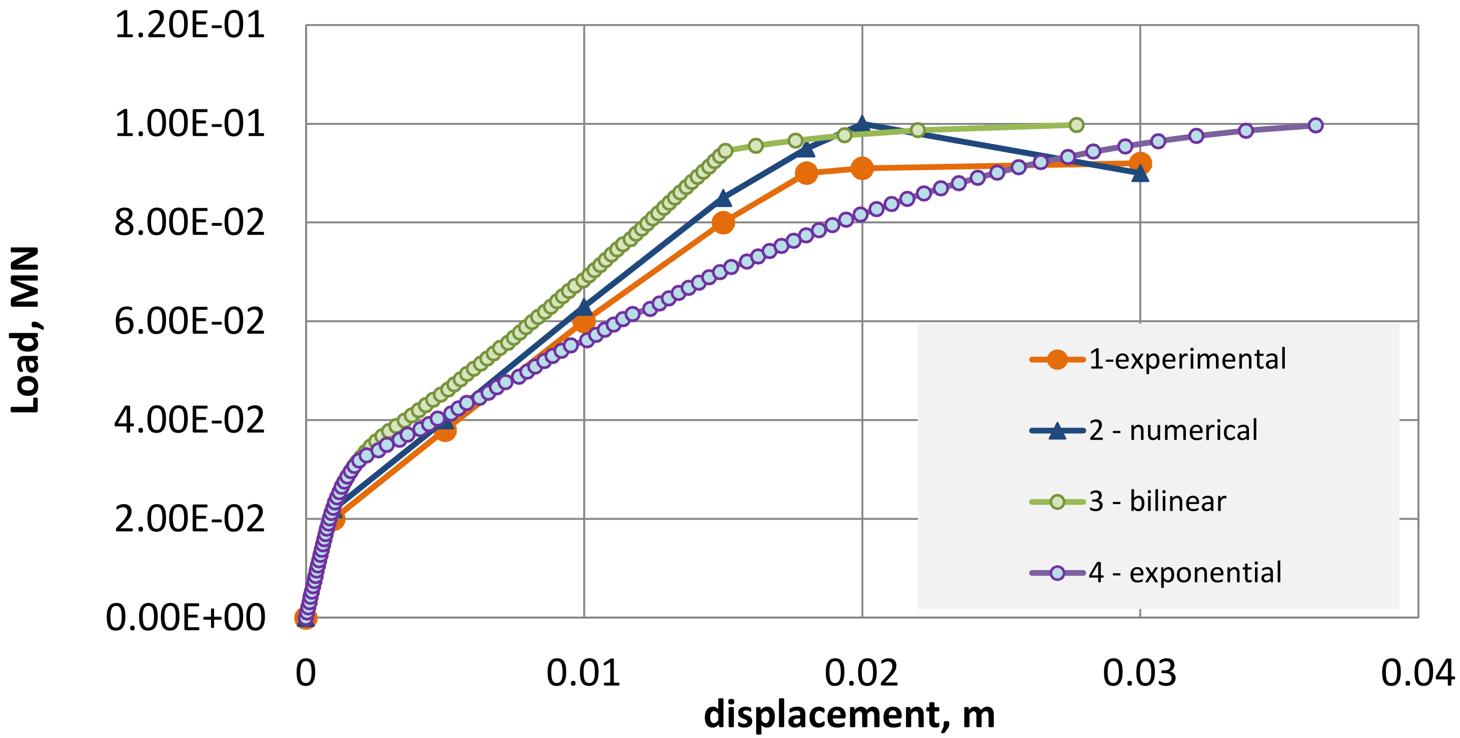
Rabczuk T., Belytschko T. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. // *International journal of fracture*, 137, pp. 19 – 49, 2006.



Бетон: E = 28 000 MPa, σ_c = 32 MPa, $\sigma_{ul} = 0.85\sigma_c$,
σ_t = 2.5 MPa, ν = 0.22, ε_c = 0.0035, $\varepsilon_{ul} = 1.41\ \varepsilon_c$

Арматура: E_s = 200 000 MPa, σ_y^s = 587 MPa .

Нагрузка - прогиб

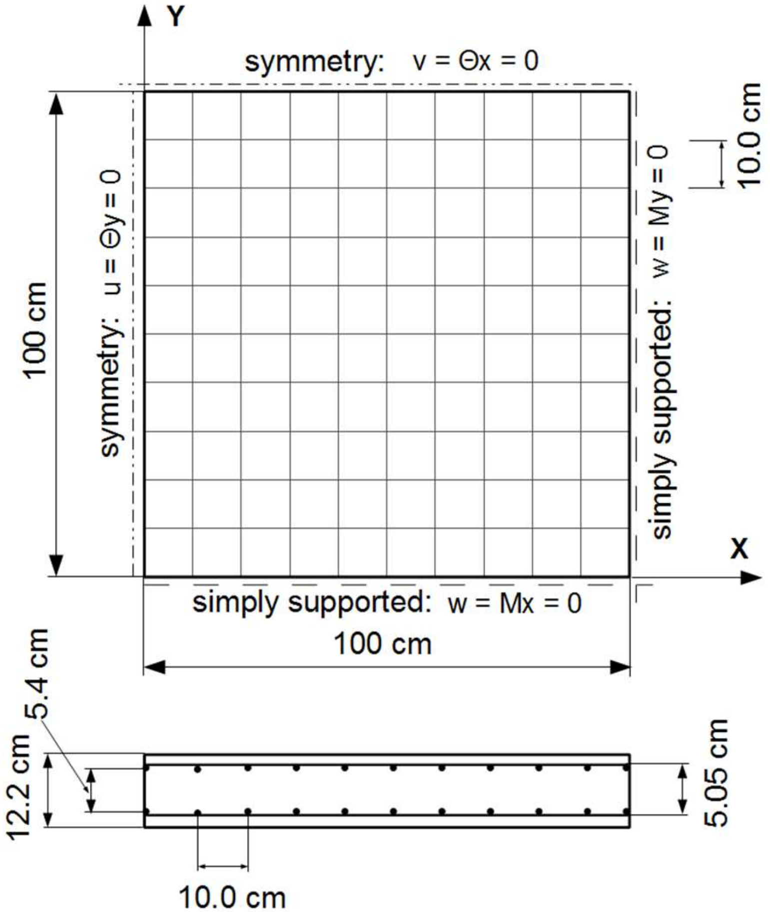


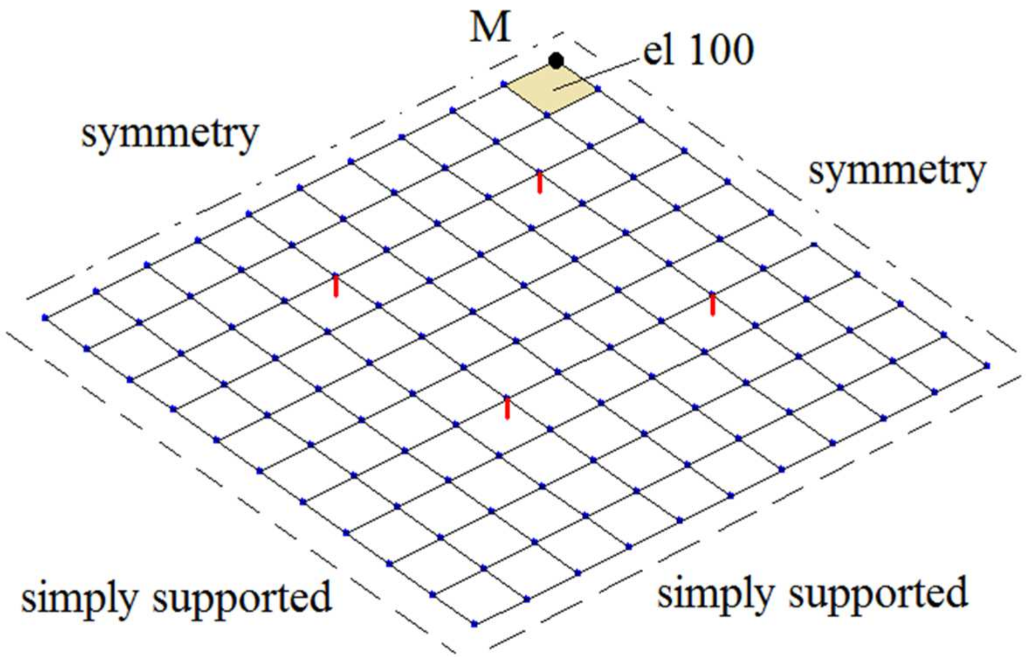
Concrete: ξ = 5 (ECC).   Steel: bilinear and exponential approximation.

Пример 2. Изгиб квадратной плиты.

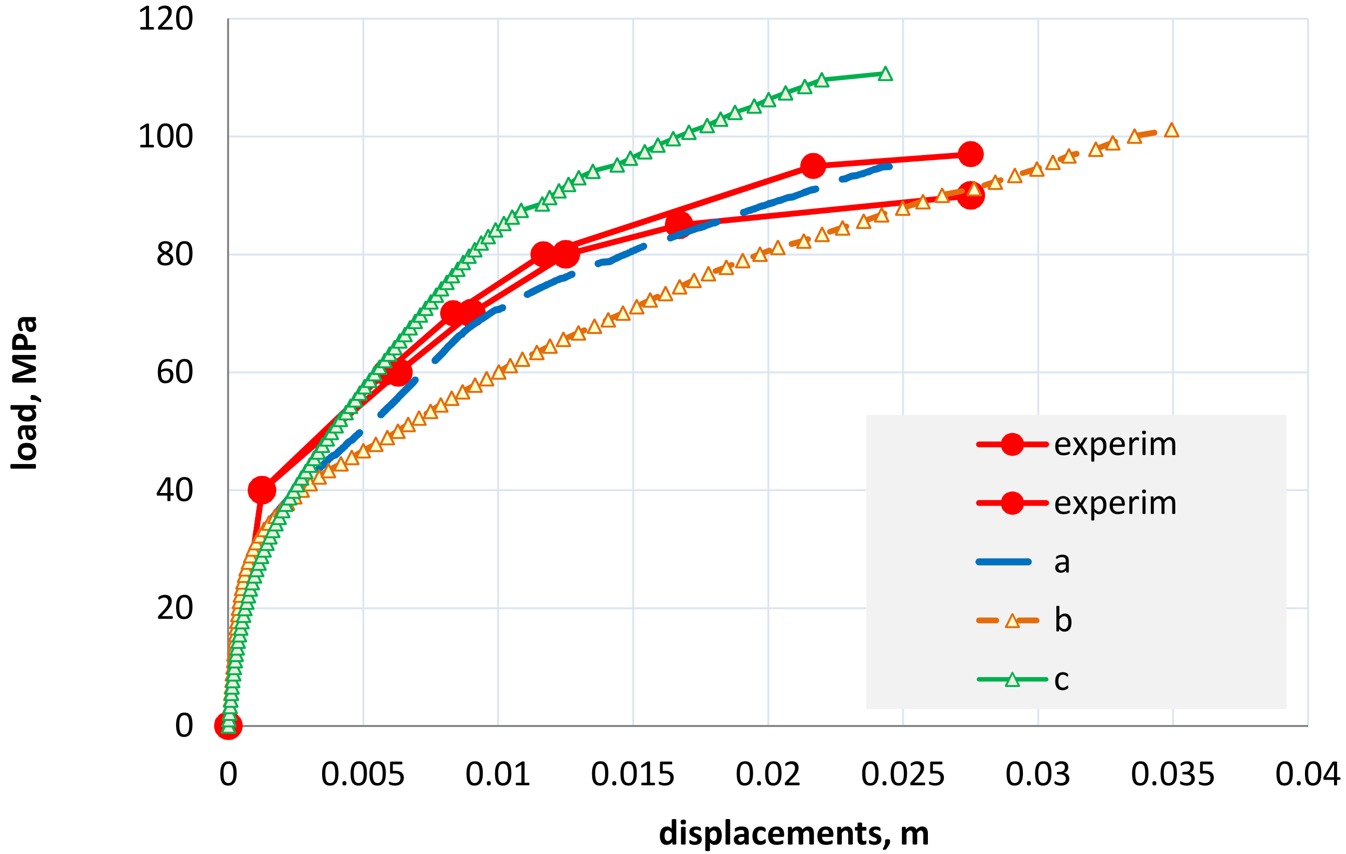
Карпенко Н. И. Теория железобетона с трещинами.

М.: Стройиздат, 1976.



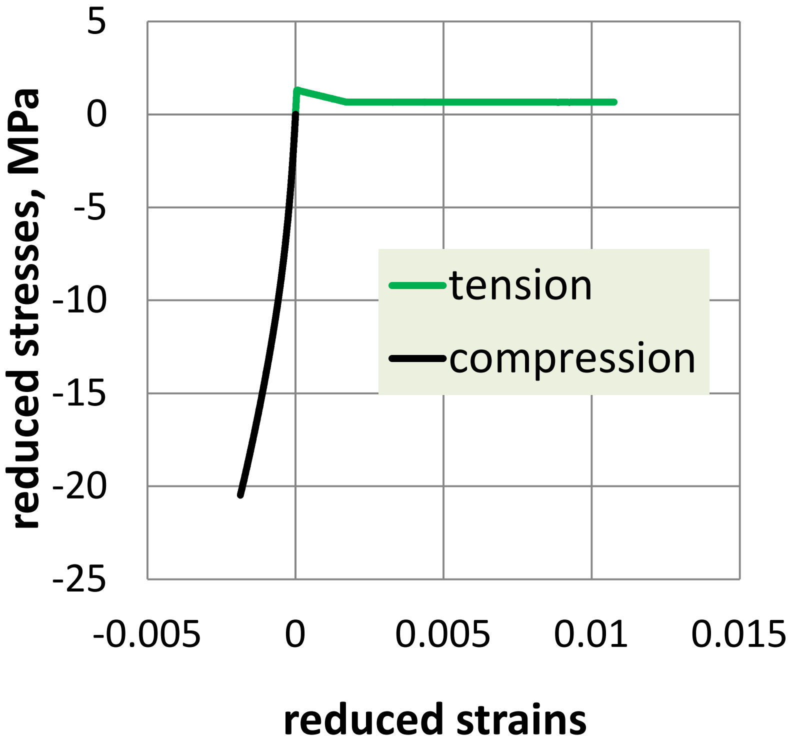


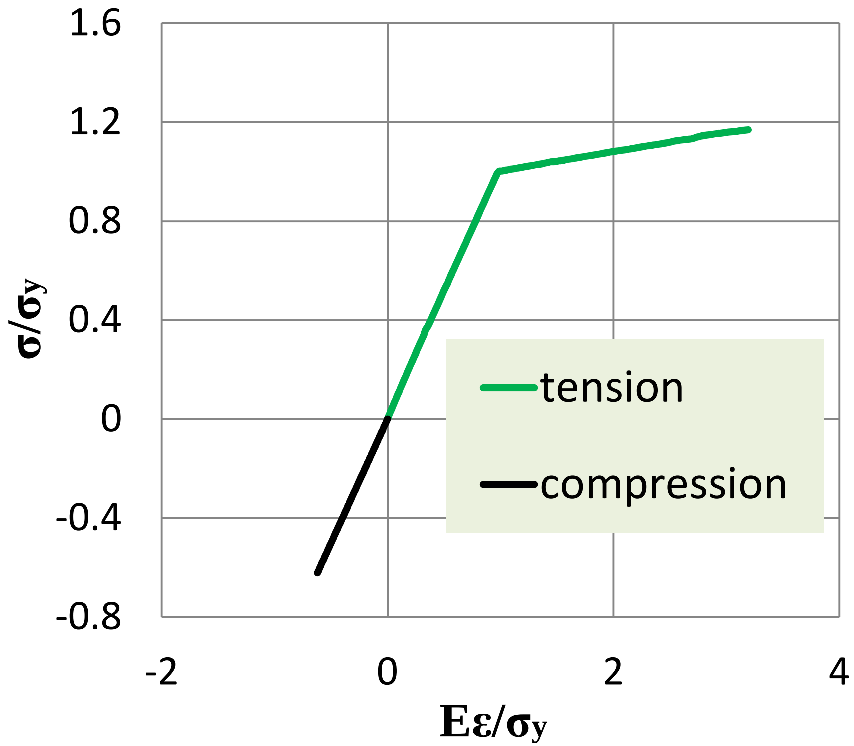
Кри вая	E_b, MPa	ν	Тип диаг. бетон	ξ	σ_c, MPa	σ_t, MPa	$E_{b,1}$, $E_{b,2}$ MPa	Тип диаг. сталь	E_s, MPa	$E_{s,1}$, $E_{s,2}$ MPa
а	30 000	0.2	ЕКБ	40	26.5	1.3	-	билинейн.	201 000	20 000
б	30 000	0.2	ЕКБ	40	26.5	1.3	-	экспонен.	201 000	20 000
с	30 000	0.2	Паде	-	26.5	1.3	100	билинейн.	201 000	15 000



Образцы 825, 826, 827.

Элемент 100.

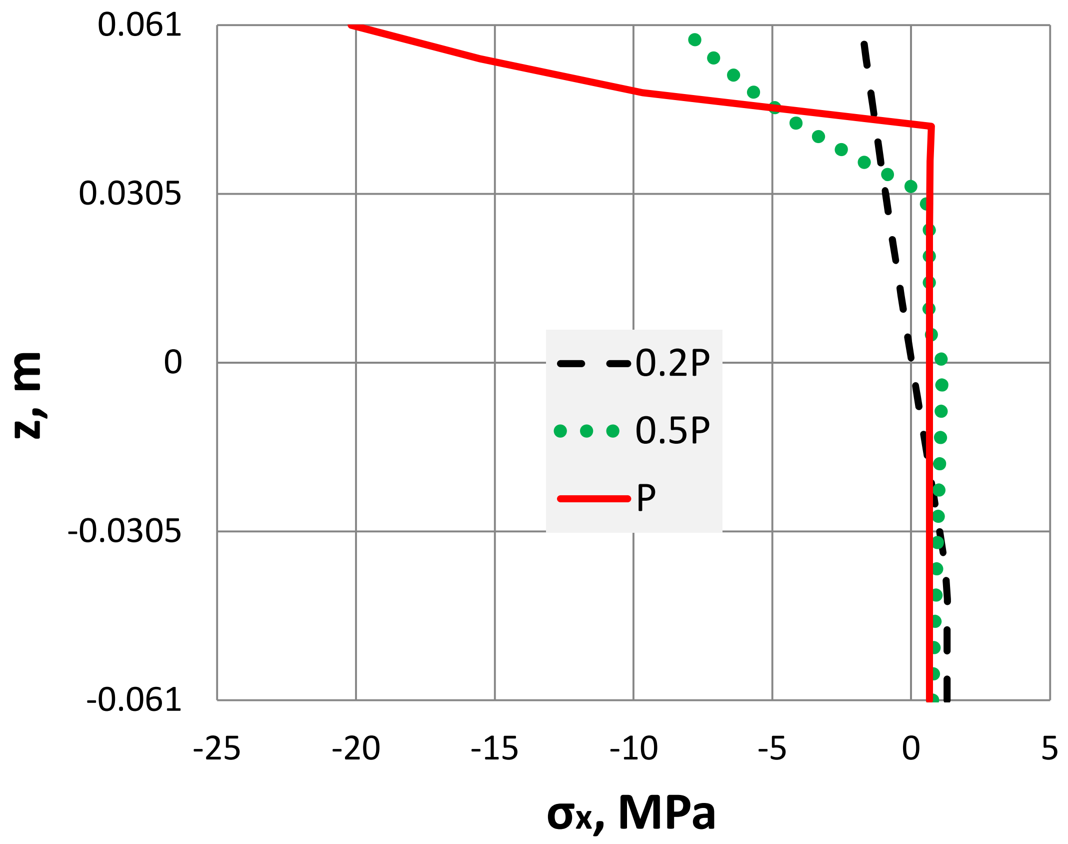




Бетон:
Приведенные напряжения – приведенные деформации для наиболее сжатого и наиболее растянутого волокон.

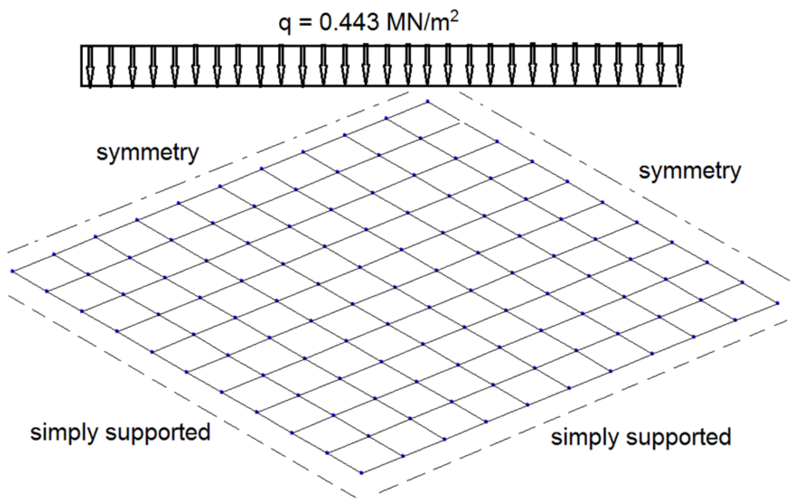
Сталь:
диаграмма σ/σ_y – $E\varepsilon/\sigma_y$ для сжатой и растянутой арматуры.

Распределение напряжений в бетоне по высоте сечения при различных уровнях нагружения. Элемент №100. σ_t = 1.3 MPa, ξ = 40, α = 0.5, β = 0.

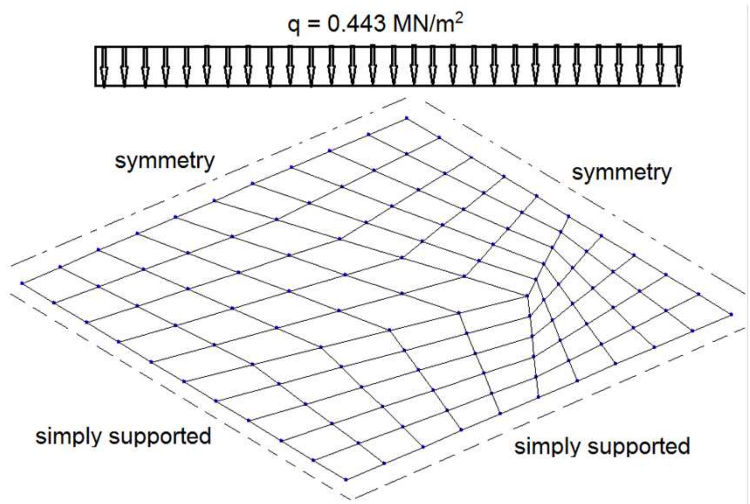


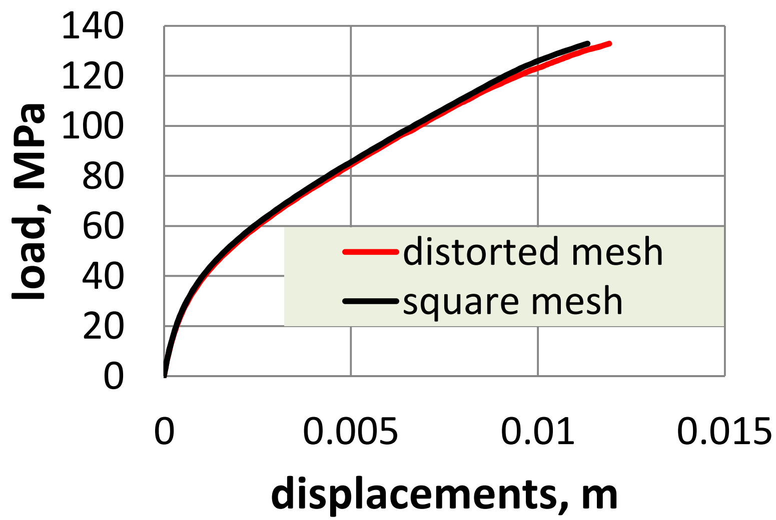
Пример 3. Сравнение решений на квадратной и косоугольной сетках.

Квадратная сетка

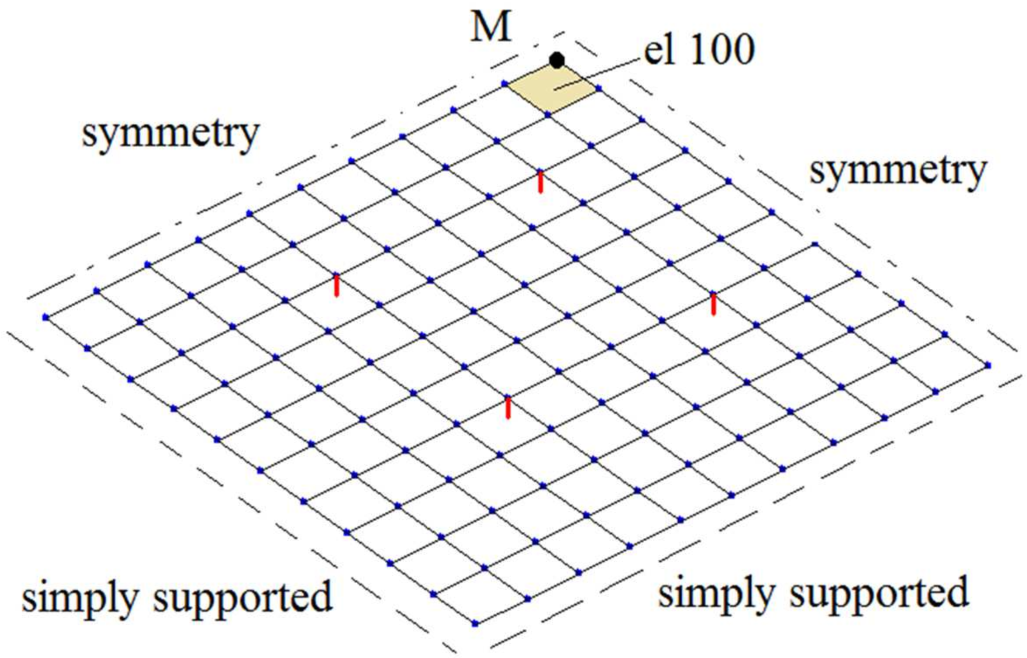


Косоугольная сетка



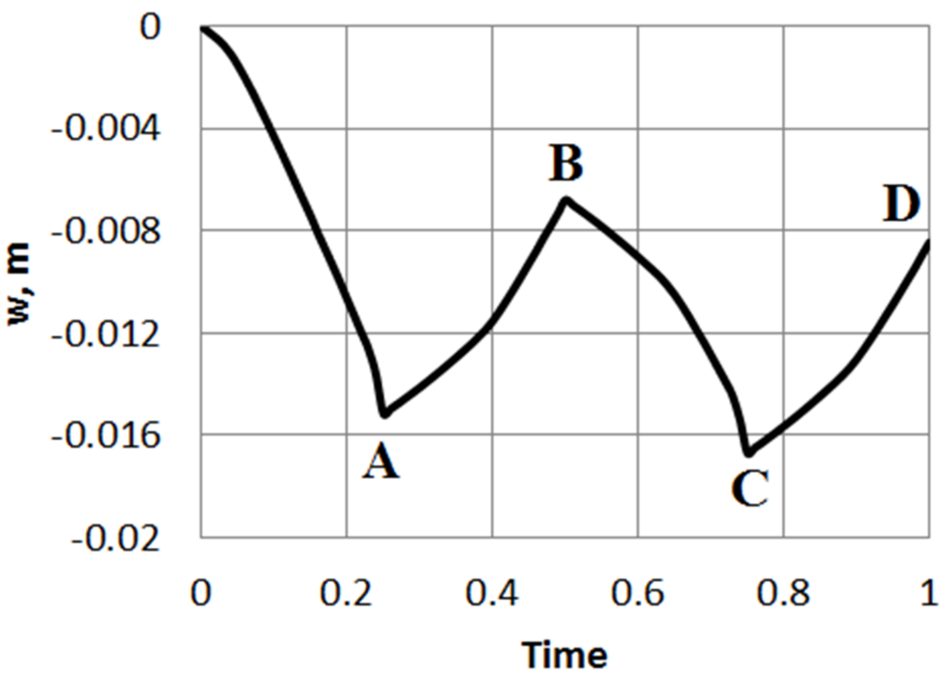


Пример 3. Циклическое нагружение.



E_b, MPa	ν	Тип диаг. бетон	ξ	σ_c, MPa	σ_t, MPa	Тип диаг. сталь	E_s, MPa	$E_{s,1}$, $E_{s,2}$ MPa
30 000	0.2	ЕКБ	30	19.9	2.65	билинейн.	201 000	1 000

Нагрузка – прогиб в центре пластины



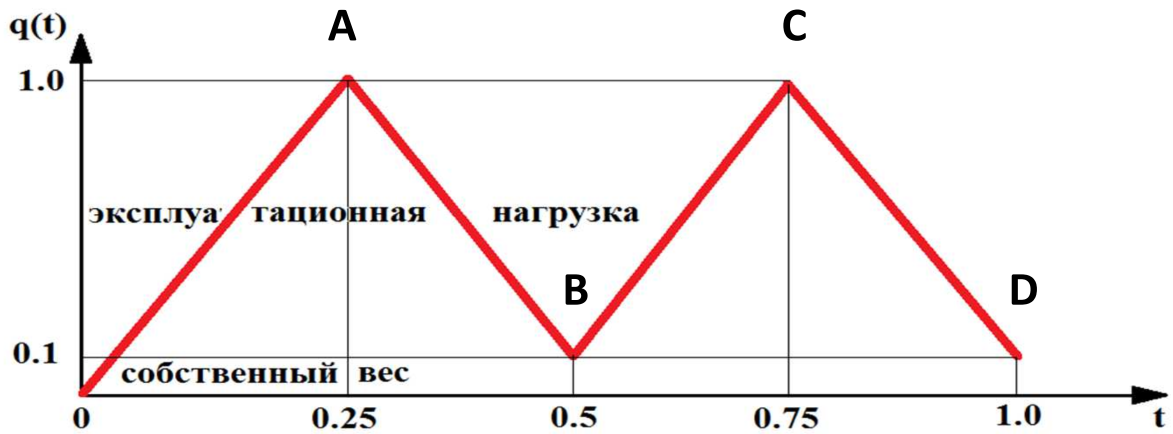
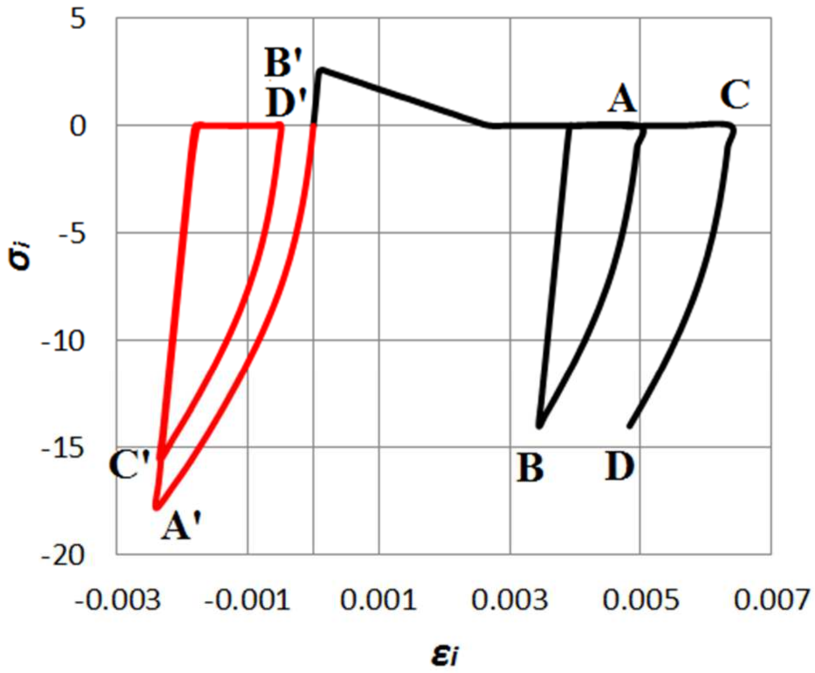
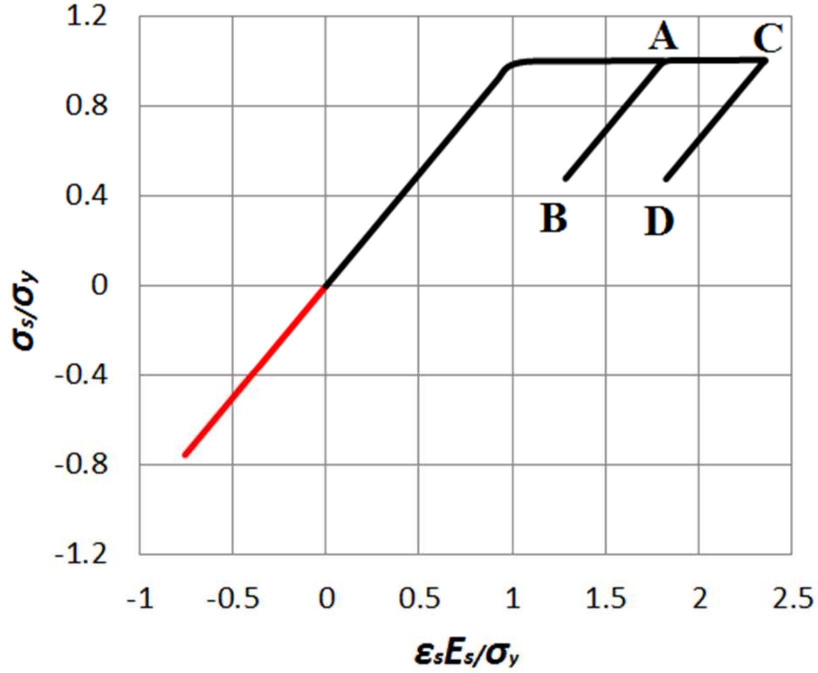


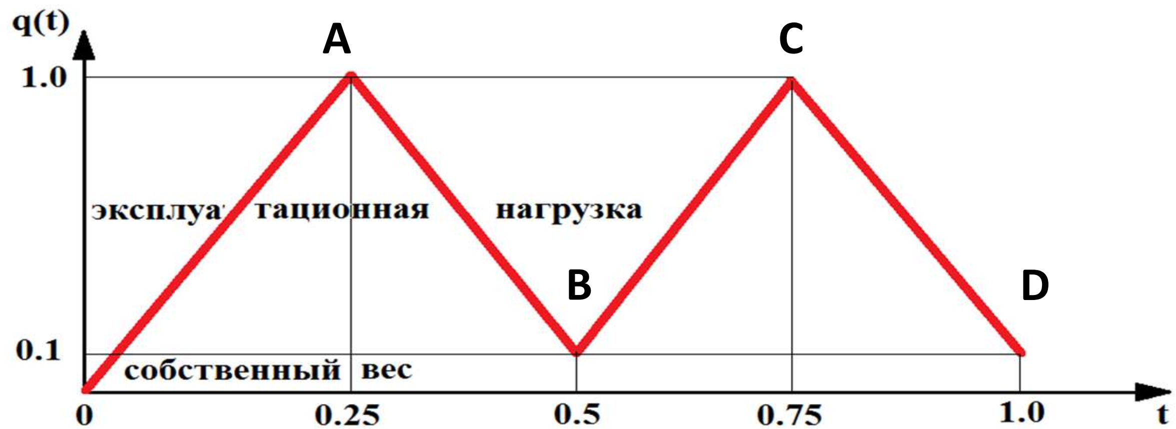
Диаграмма σi – εi для бетона. Элемент 100. Наиболее растянутое и наиболее сжатое волокно.



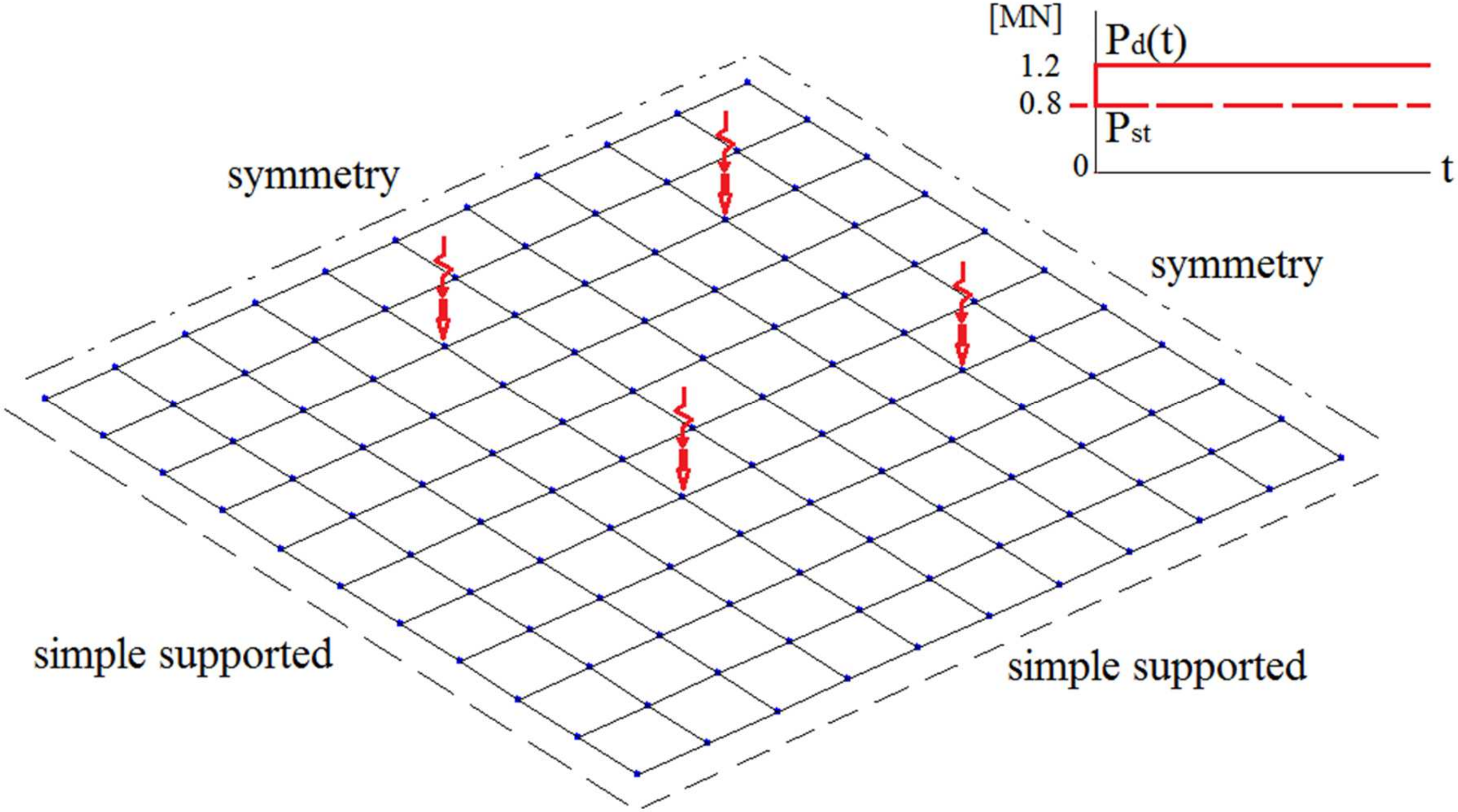
Concrete



Steel



Пример 4. Динамическое нагружение.



Постановка задачи:

1. **Сначала прикладывается статическая нагрузка P_{st} (решается нелинейная задача статики).**
2. **Затем прикладывается динамическая нагрузка $P_d(t)$, причем начальные перемещения для нелинейной задачи динамики соответствуют статическим перемещениям.**

Вертикальные перемещения узла 3:

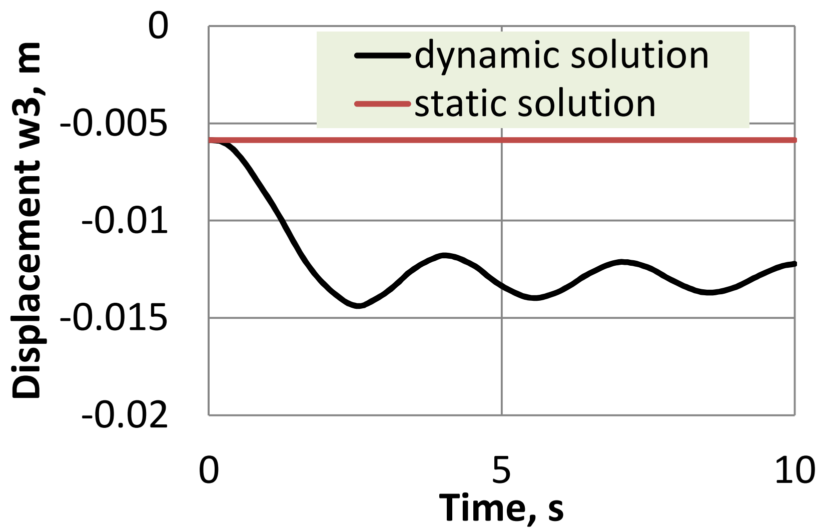


Диаграмма σi – εi для бетона. Элемент 100.

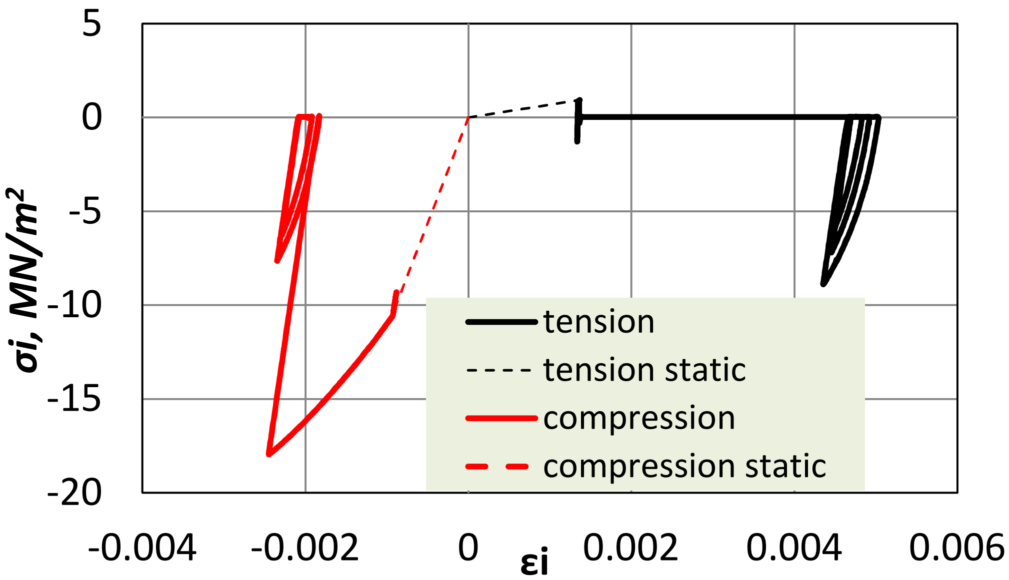
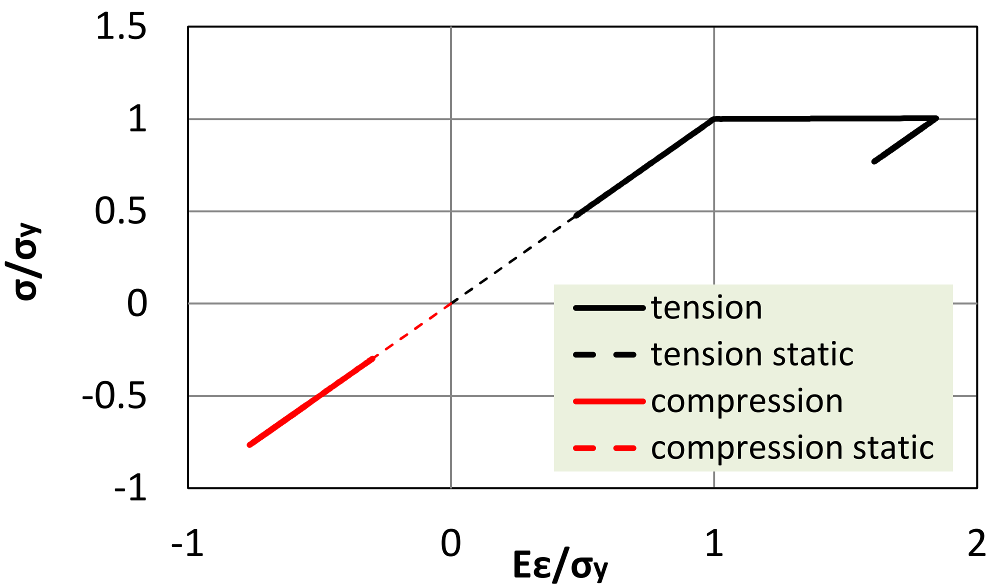
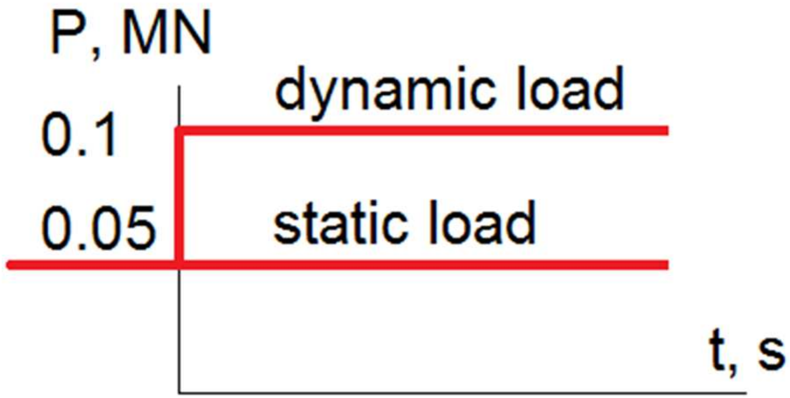


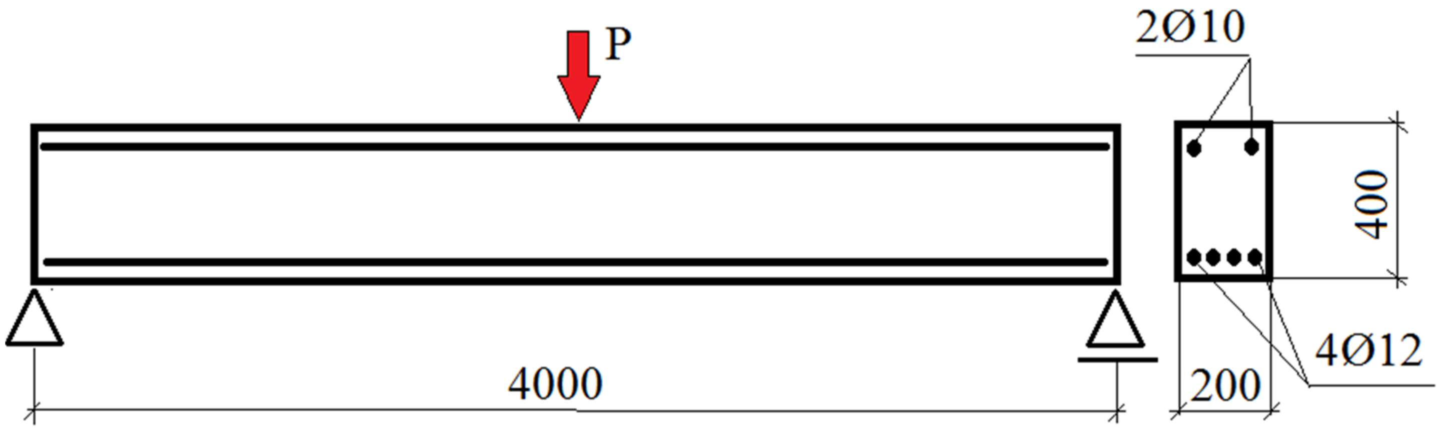
Диаграмма σi – εi для стали. Элемент 100.



Упруго-пластическая и нелинейно-упругая модели материала.

Рассматривается задача 1.





Прогиб в середине пролета. Вязкое трение отсутствует.

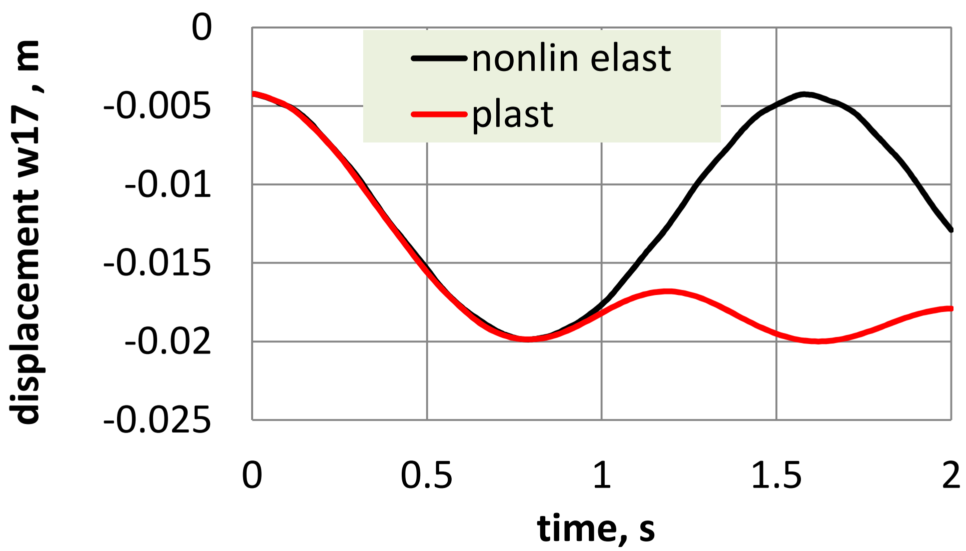


Диаграмма σi – εi в бетоне
(упруго-пластическая модель)

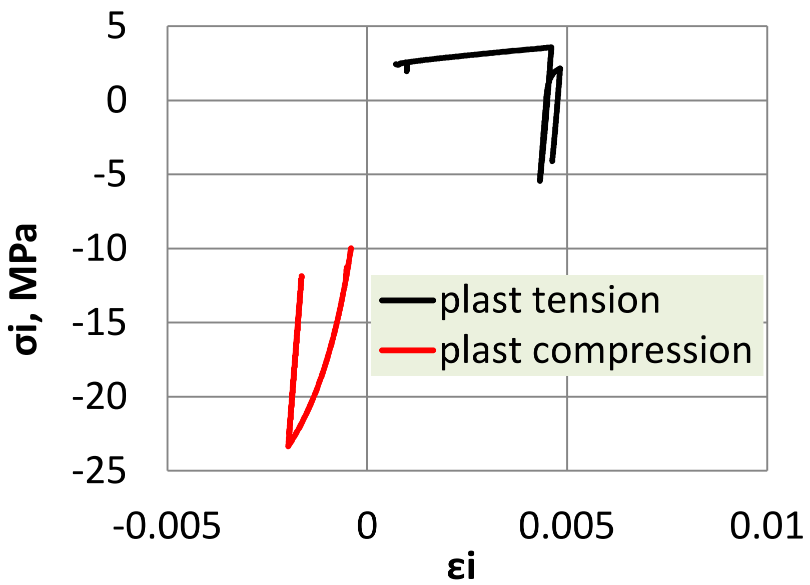
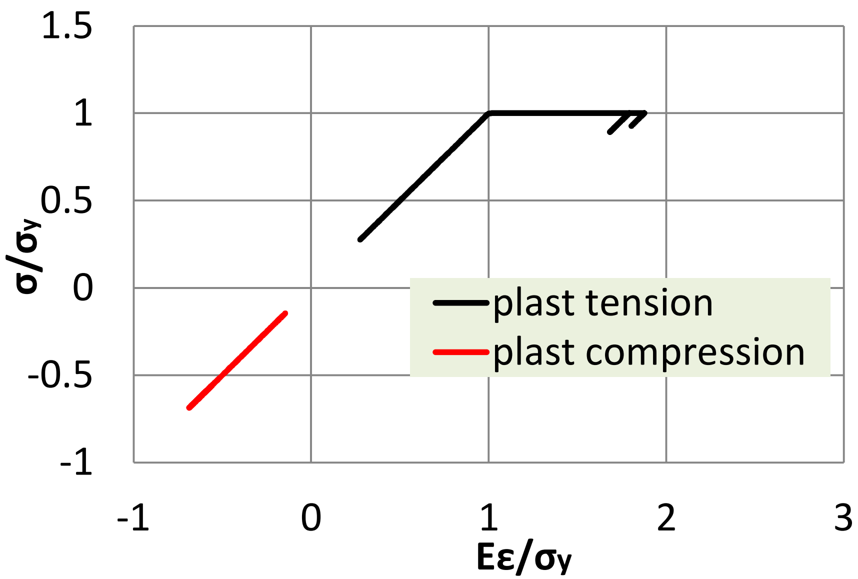


Диаграмма σ – ε в стали
(упруго-пластическая модель)



Заключение

- **Предложенный подход сочетает относительную простоту реализации по сравнению с другими подходами и демонстрирует результаты, хорошо согласующиеся с результатами физических экспериментов и численными решениями, использующими более точные механические модели.**
- **Разработанный конечный элемент не требует привязки к арматурным стержням и устойчиво работает на косоугольных сетках, что должно позволить его применение для анализа областей со сложной геометрией.**
- **Формулирование соотношений деформационной теории пластичности в терминах остаточных деформаций позволило решать задачи о циклическом и динамическом нагружении.**

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ !