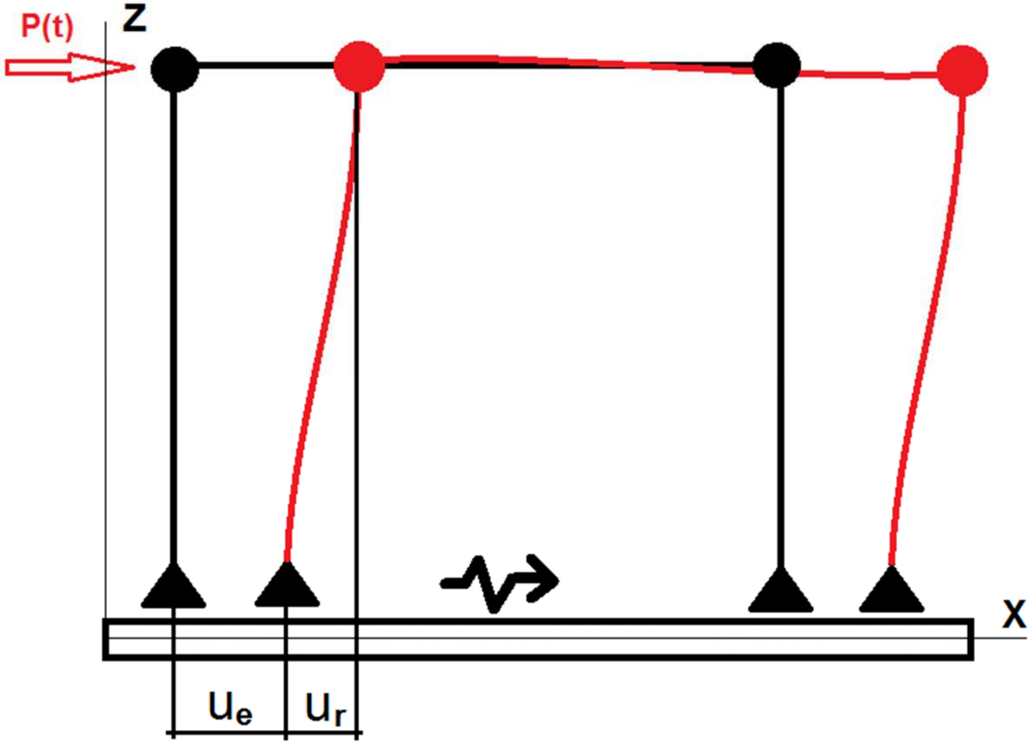
Интегрирование уравнений движения в системе SCAD

С. Ю. Фиалко

Технический университет «Краковская политехника»

Постановка задачи

1. **Классическая – задача решается в системе отсчета, связанной с подвижной платформой.**



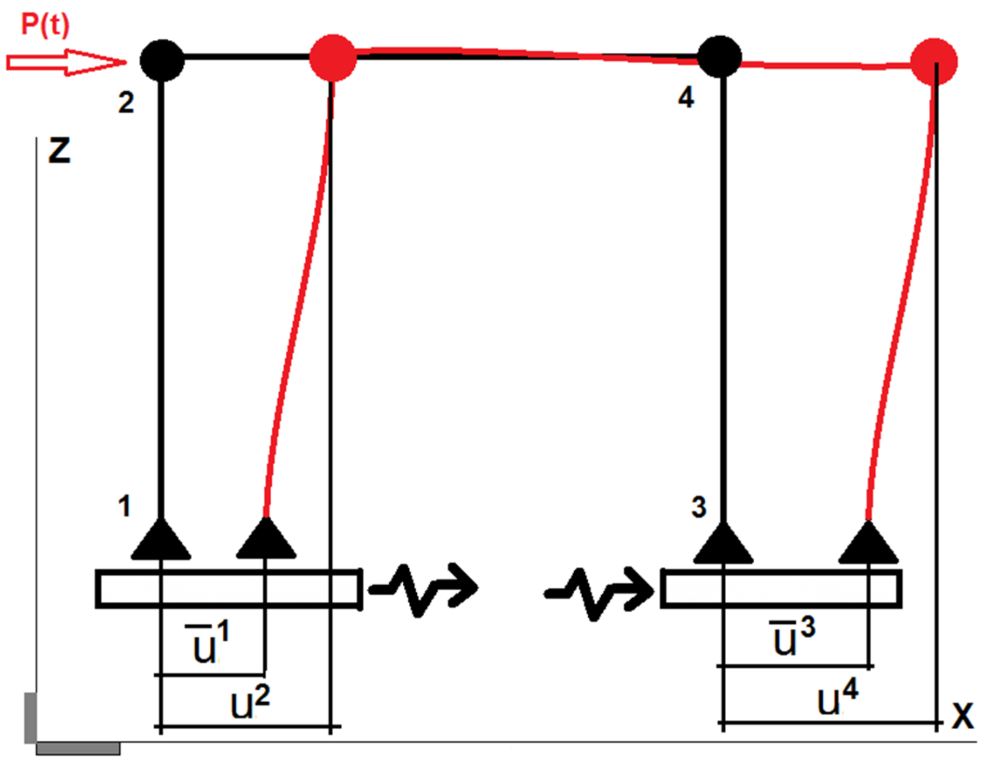
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r;$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_e + \ddot{\mathbf{u}}_r;$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}\mathbf{u}_r = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{p}(t)$$

Постановка задачи

2. Постановка задачи в абсолютных координатах дает возможность естественным образом рассматривать асинхронное возмущение опор



$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}; \quad \overline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \overline{u}^1 \\ \overline{u}^3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^2 \\ w^2 \\ \theta^2 \\ u^4 \\ w^4 \\ \theta^4 \end{pmatrix};$$

$\overline{\mathbf{u}}$ - заданные перемещения;

$\mathbf{u}$ - перемещения, подлежащие определению;

Постановка задачи

Уравнения движения в абсолютных координатах:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{M}}} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Здесь $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{C}}$ **- Матрицы жесткости, масс и диссипации, соответствующие полным векторам перемещений, ускорений и скоростей** $\hat{\mathbf{u}}, \ddot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}$ **.**

M, K, – матрицы масс и жесткости, относящиеся к степеням свободы, подлежащим определению (стандартные матрицы МКЭ), матрица $\mathbf{K}_{12}$ собирается из подматриц жесткостей конечных элементов, узлы которых содержат степени свободы вектора перемещений $\bar{\mathbf{u}}$ **.**

p(*t*) – вектор нагрузки.

Постановка задачи

Гипотеза Рэлея: $$\hat{\mathbf{C}} = \alpha \cdot \hat{\mathbf{M}} + \beta \cdot \hat{\mathbf{K}} \tag{2}$$

Здесь α, β – коэффициенты пропорциональности, причем слагаемое αM отвечает за демпфирование по нижним модам, а βK – по верхним.

Подставляем (2) в (1):

$$\mathbf{M}\left(\ddot{\mathbf{u}} + \alpha \cdot \dot{\mathbf{u}}\right) + \mathbf{K}\left(\mathbf{u} + \beta \cdot \dot{\mathbf{u}}\right) = -\mathbf{K}_{21}\left(\overline{\mathbf{u}} + \beta \cdot \dot{\overline{\mathbf{u}}}\right) + \mathbf{p}(t) \tag{3}$$

Если в классической постановке вынужденное смещение опор представляется обычно акселерограммой, то в предлагаемой постановке задается функция перемещений, а функция скорости определяется в результате численного дифференцирования последней.

Постановка задачи

Пусть $$\overline{\mathbf{u}} = \sum_{s=1}^{M_s} \mu_s \cdot \mathbf{k}_s \cdot f_s\left(t - t_0^s\right), \quad \dot{\overline{\mathbf{u}}} = \sum_{s=1}^{M_s} \mu_s \cdot \mathbf{k}_s \cdot \dot{f}_s\left(t - t_0^s\right)$$

где $\mathbf{k}_s$ – вектор пространственной конфигурации, задающие форму вынужденных смещений, $f_s(t)$ – функция времени, $s = 1, 2, \ldots, M_s$ **- номера статических загружений при расчете на соответствующие вынужденные смещения.**

Аналогично $\mathbf{p}(t) = \sum_{p=1}^{N_p} \mu_p \cdot \mathbf{k}_p \cdot f_p\left(t - t_0^p\right)$ **, где** $p = 1, 2, \ldots, N_p$ **- номера**

статических загружений при расчете на силовые воздействия, $\mathbf{k}_p$ – векторы пространственной конфигурации нагрузки, $f_p(t)$ – функция времени.

Величины $\mu_s, t_0^s, \mu_p, t_0^p$ **задают начальный множитель и время запаздывания.**

Постановка задачи

Будем называть каждое слагаемое приведенных выше сумм соответственно p-ой или s-ой составляющей динамического загружения. Обозначим

$$\mathbf{b}_s = -\mathbf{K}_{21} \cdot \mathbf{k}_s, \quad s = 1, 2, \ldots, M_s$$

Приведенная ниже задача Коши описывает уравнения движения в изложенной постановке

$$\begin{cases} \mathbf{M}\left(\ddot{\mathbf{u}} + \alpha \cdot \dot{\mathbf{u}}\right) + \mathbf{K}\left(\mathbf{u} + \beta \cdot \dot{\mathbf{u}}\right) = \sum\limits_{s=1}^{M_s} \mathbf{b}_s \cdot \mu_s \cdot \left[f_s\left(t - t_0^s\right) + \beta \cdot \dot{f}_s\left(t - t_0^s\right)\right] + \sum\limits_{p=1}^{N_p} \mathbf{k}_p \cdot \mu_p \cdot f_p\left(t - t_0^p\right) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \end{cases} \quad (4)$$

Определение параметров демпфирования

Обычно из эксперимента известно модальное демпфирование в процентах от критического ξ_i *, i=1, 2, … ,*N_{modes} **.**
Разложим вектор перемещений по формам собственных колебаний:

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\xi_i\omega_i,\ i = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{mod}es} \qquad \textbf{(5)}$$

Для нахождения неизвестных α, β **воспользуемся уравнением (5) для** *i = 1, 2* **:**

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2\left(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1\right)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \qquad \beta = \frac{2\left(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1\right)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \qquad \textbf{(6)}$$

Формулы (6) работают при $\omega_2 \neq \omega_1$.

Определение параметров демпфирования

Параметр α отвечает за затухание по низким модам, а β – по высоким. Важно учитывать и тот, и другой.

Часто принимается упрощение $\beta = 0$. При этом не учитывается демпфирование по верхним модам, поэтому динамическая реакция системы может оказаться существенно завышенной (до 2-х раз и более).

Модели демпфирования, реализованные в методе разложения по формам собственных колебаний, и при прямом интегрировании с использованием гипотезы Рэлея, вообще говоря, разные. Это видно из неоднозначности нахождения параметров α, β из (5), поскольку, задавая разные значения пар индекса i, будем получать разные значения α, β . Однако для большинства практических задач метод разложения по формам собственных колебаний и методы прямого интегрирования дают близкие результаты, если и тот, и другой применены корректно.

Метод Ньюмарка

Для решения задачи используется безусловно устойчивый вариант метода Ньюмарка в форме «предиктор-корректор».

Весь временной интервал разбивается на конечное число шагов

$$Nstep = T_{dur} / \Delta t + 1, \quad T_{dur} = t_{end} - t_{start}$$

В пределах одной задачи шаг интегрирования сохраняется постоянным.

Перепишем уравнение движения (4) в виде:

$$\mathbf{M}(\mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{K}(\mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f}_{ext}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}.$$

Алгоритм решения

1. **Формируем динамическую матрицу** $\mathbf{K}_{dyn} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} + \frac{2\alpha}{\Delta t} \right) \mathbf{M} + \left(1 + \frac{2\beta}{\Delta t} \right) \mathbf{K}$

2. **Раскладываем ее по Холецкому** $\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{L}_{dyn} \cdot \mathbf{L}_{dyn}^T$

Метод Ньюмарка

3. Начальные условия: $k = 1$; $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0$; $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0$;

4. $k = 1, 2, \ldots, Nstep$

5. Предиктор:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_k + \Delta t \cdot \mathbf{v}_k + \dfrac{\Delta t^2}{4} \cdot \mathbf{a}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_k + \dfrac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{k+1} = 0 \end{cases}$$

6. Корректор:

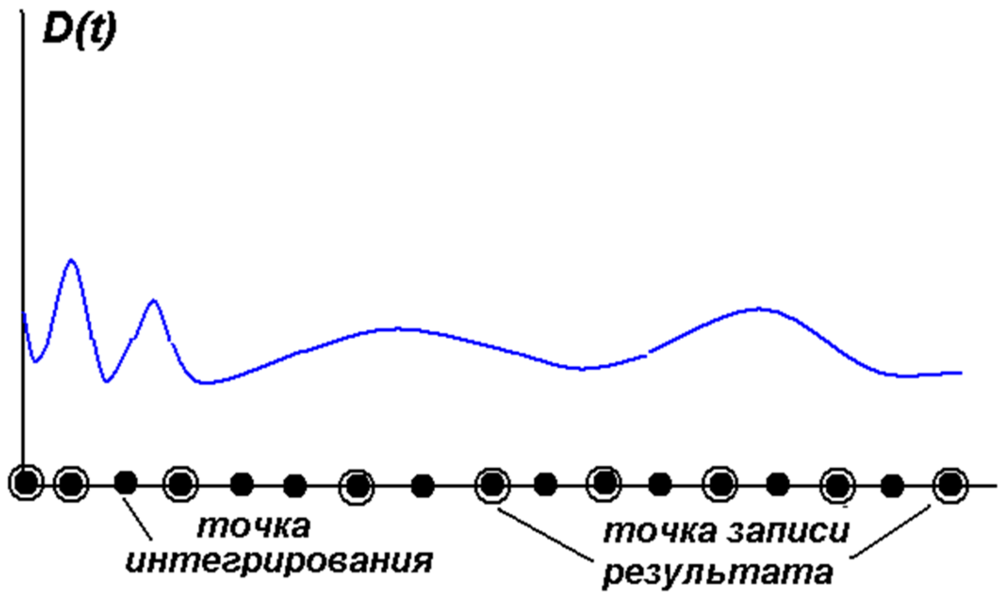
$$\mathbf{r} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{M} \cdot \left(\mathbf{a}_{k+1} + \alpha \mathbf{v}_{k+1}\right) - \mathbf{K} \cdot \left(\mathbf{u}_{k+1} + \beta \mathbf{v}_{k+1}\right)$$

$$\mathbf{L}_{dyn} \cdot \mathbf{L}_{dyn}^T \cdot \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r} \rightarrow \Delta \mathbf{u}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{k+1} += \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_{k+1} = \dfrac{4}{\Delta t^2}\left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}^0\right) \\ \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}^0 + \dfrac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_{k+1} \end{cases}$$

Метод Ньюмарка

Запись результатов (перемещений, скоростей, ускорений) производится в моменты времени, совпадающие с точками интегрирования.



Обычно для достижения приемлемой точности решения шаг интегрирования назначается значительно меньше шага выдачи результатов расчета. Результаты можно формировать как с постоянным шагом, так и с переменным, важно лишь, чтобы они были кратными шагам интегрирования.

Рекомендации по назначению важнейших параметров

1. **Создать статические загружения, с которых будут собираться массы для динамического анализа.**

2. **Создать статические загружения (силовые и кинематические), которые задают пространственную конфигурацию динамических нагрузок.**

3. **Подготовить текстовые файлы, задающие функции времени.**

4. **Выполнить анализ собственных частот и форм колебаний, проанализировать результаты.**

5. **Шаг интегрирования назначить из соображений** $[0.01 – 0.001]\ T_1$**, где** T_1 **– период первого тона.**

Рекомендации по назначению важнейших параметров

6. Если о динамическом поведении конструкции ничего не известно, то шаг выдачи результатов рекомендуется назначить равномерным, величина - примерно через 5 – 100 шагов интегрирования по времени.

7. Выполнить динамический анализ. Проанализировать перемещения контрольных узлов и усилия в контрольных конечных элементах.

8. Сгустить шаг интегрирования в 5 - 10 раз и при тех же точках выдачи результата повторить расчет.

9. Сравнить результаты двух расчетов по перемещениям контрольных узлов и усилиям в контрольных элементах. Если расхождение небольшое, второй результат считать как окончательный.

Рекомендации по назначению важнейших параметров

10. Если расхождение значительное, снова уменьшить шаг интегрирования и повторить расчет. И так до тех пор, пока разница между двумя расчетами не окажется достаточно малой.

11. Подкорректировать шаг выдачи результатов и выполнить окончательный расчет.

12. При реализации алгоритма используется техника разреженных матриц, поэтому численный алгоритм интегрирования по времени работает достаточно быстро, что позволяет решать задачу с малым шагом интегрирования.

13. Значительное время занимает запись результатов в точках его выдачи и дальнейшее определение усилий. Поэтому без особой необходимости не следует сохранять результаты необоснованно часто.

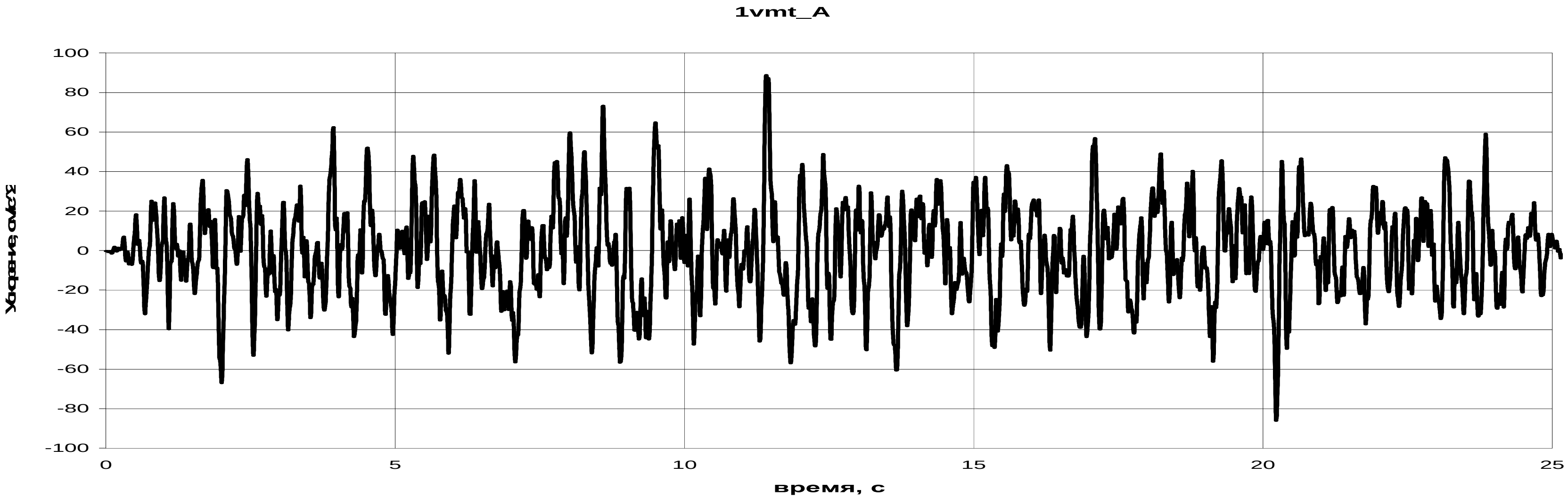
Расчет большепролетной арки на вынужденное смещение опор

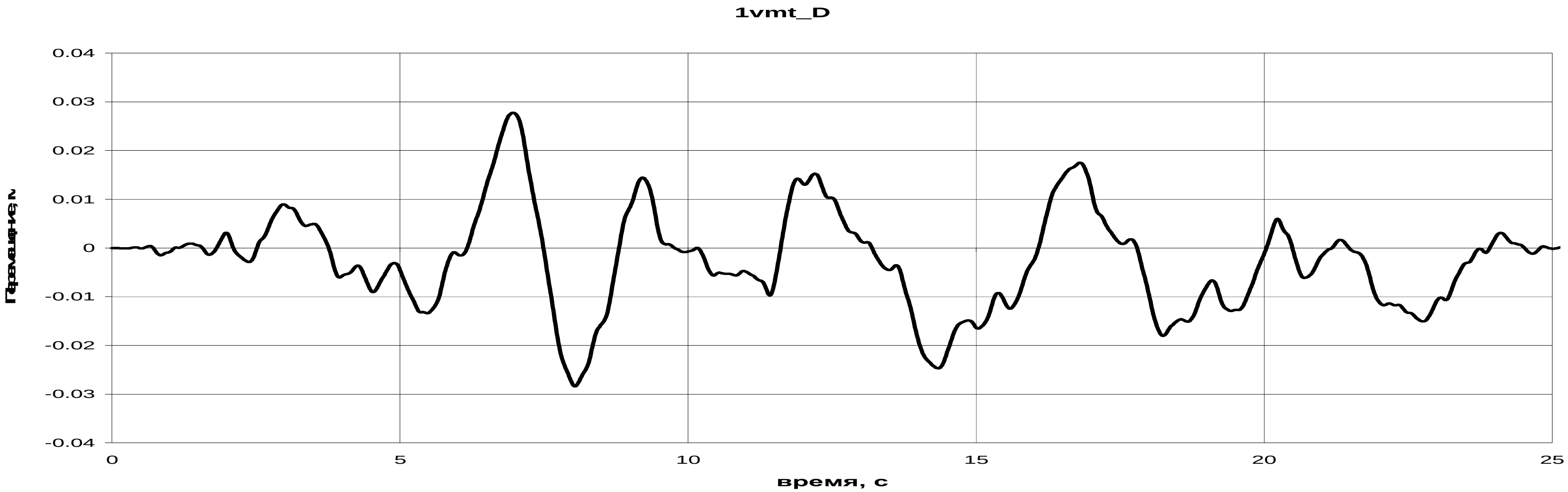
При расчете большепролетных конструкций на заданное вынужденное смещение опор следует учитывать тот факт, что скорость распространения возмущений в грунте является конечной, и входное воздействие, описываемое одной и той же функцией времени, достигает разных опор в различные моменты времени.

В рассматриваемом примере пролет сооружения равен 257 м, а скорость распространения сейсмической волны в грунте – 80 м/с . Пусть возмущение в грунте распространяется от левой опоры к правой. Тогда для левой опоры время запаздывания равно 0, а для правой опоры – 257/80 = 1.29 с.

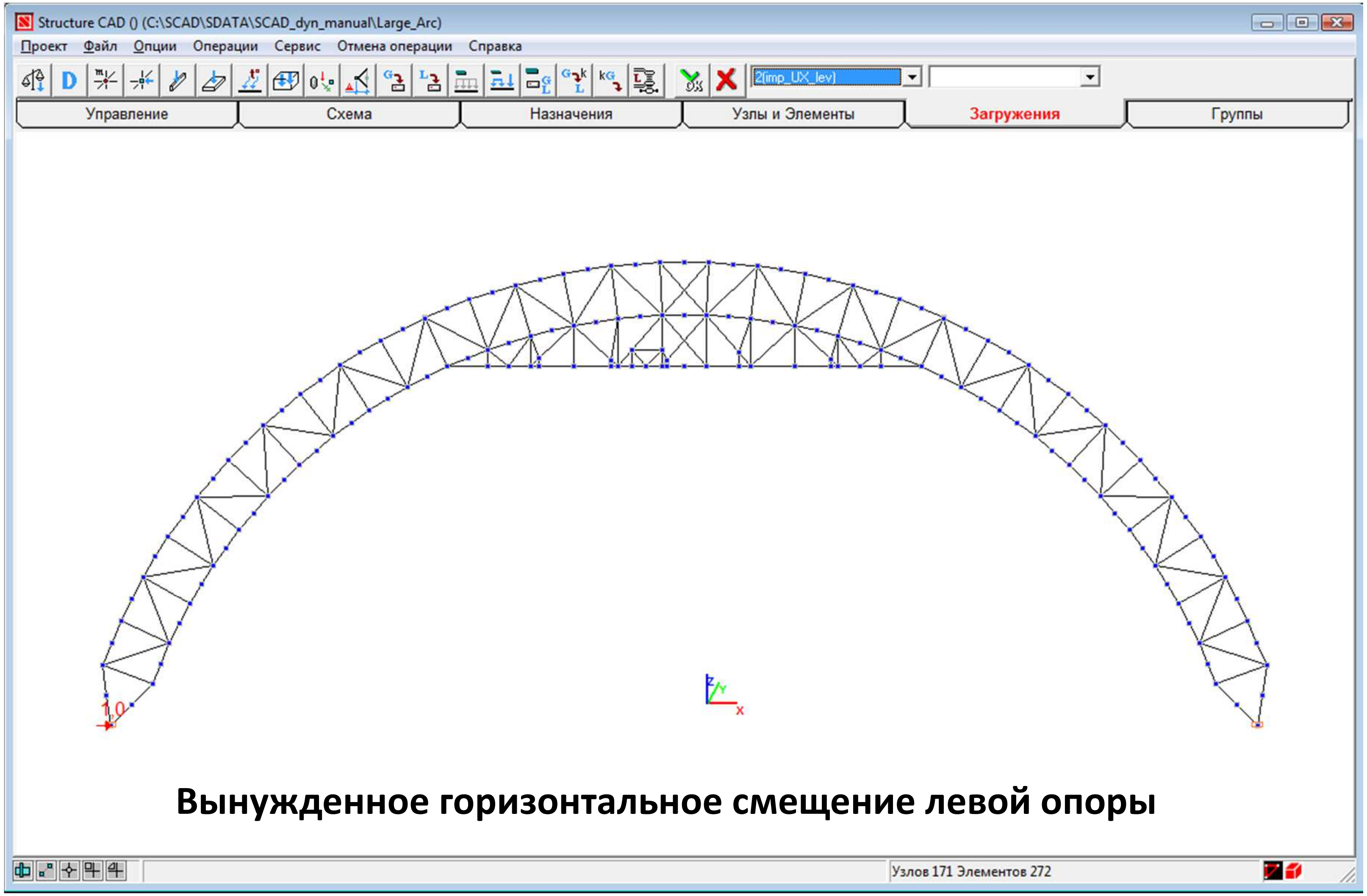
По заданной акселерограмме определяется функция перемещений, приведенная на рис. Для этого можно воспользоваться редактором акселерограмм, входящим в состав комплекса SCAD.

Расчет большепролетной арки на вынужденное смещение опор



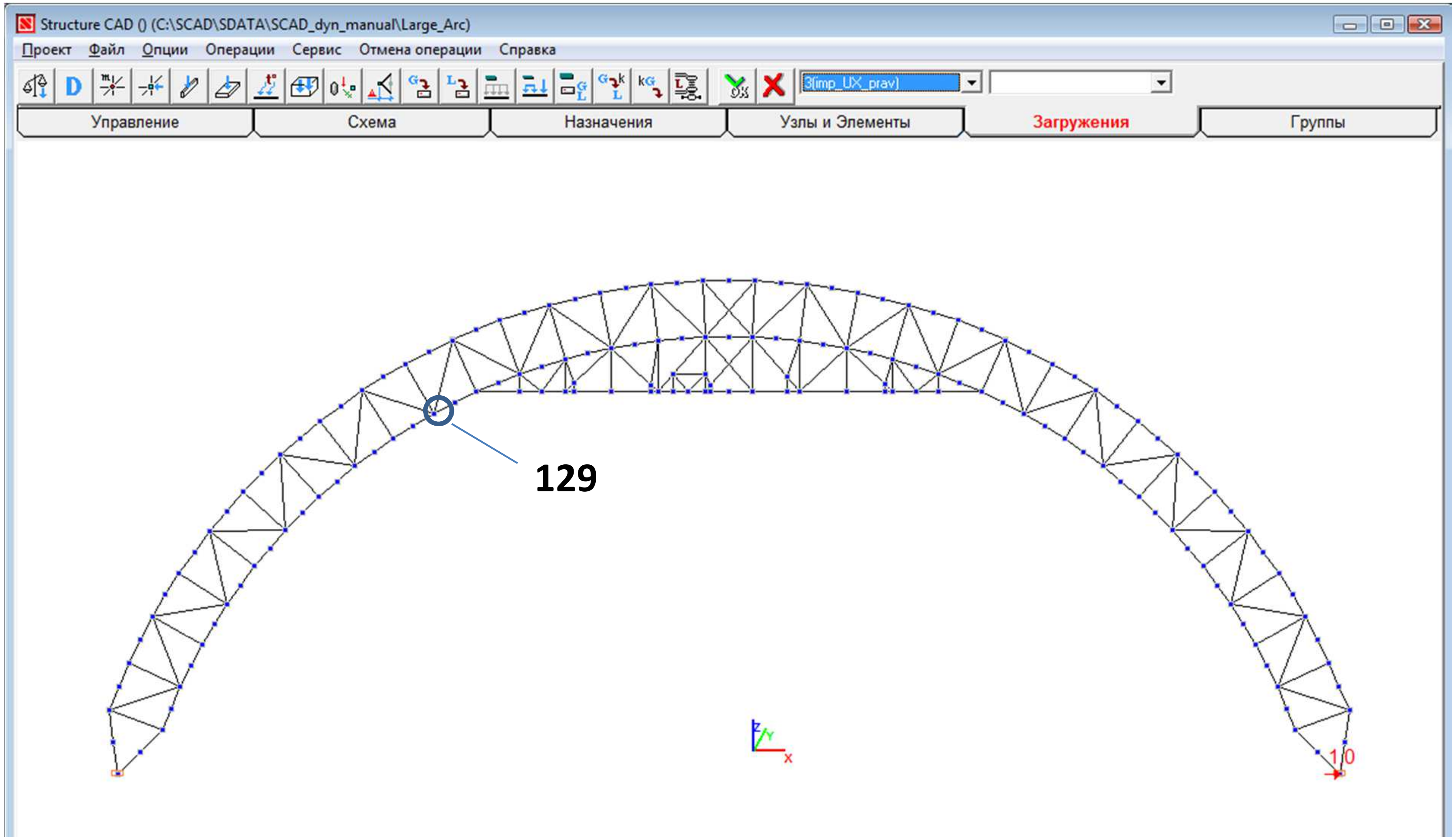


Расчет большепролетной арки на вынужденное смещение опор



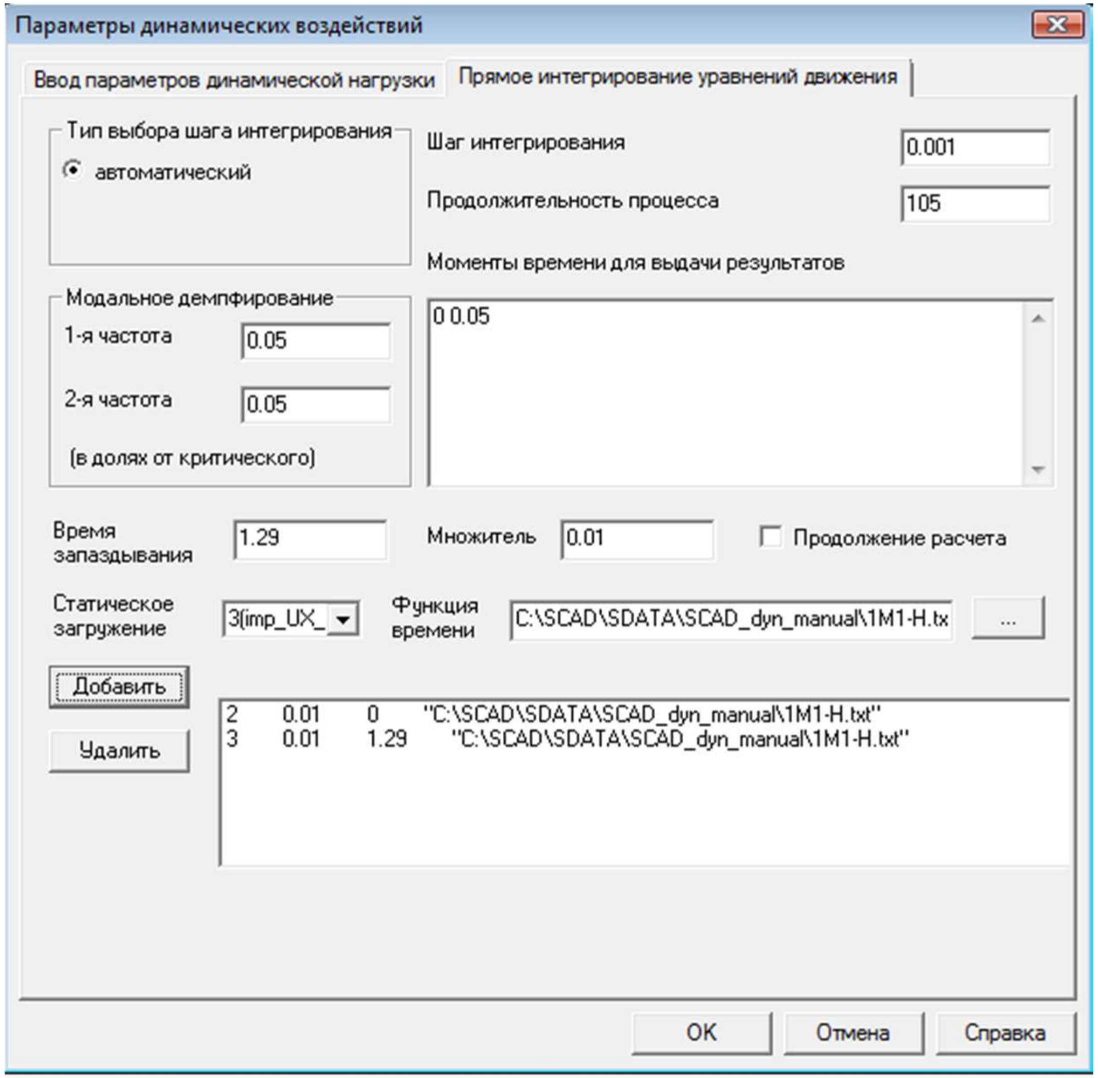
Вынужденное горизонтальное смещение левой опоры

Расчет большепролетной арки на вынужденное смещение опор



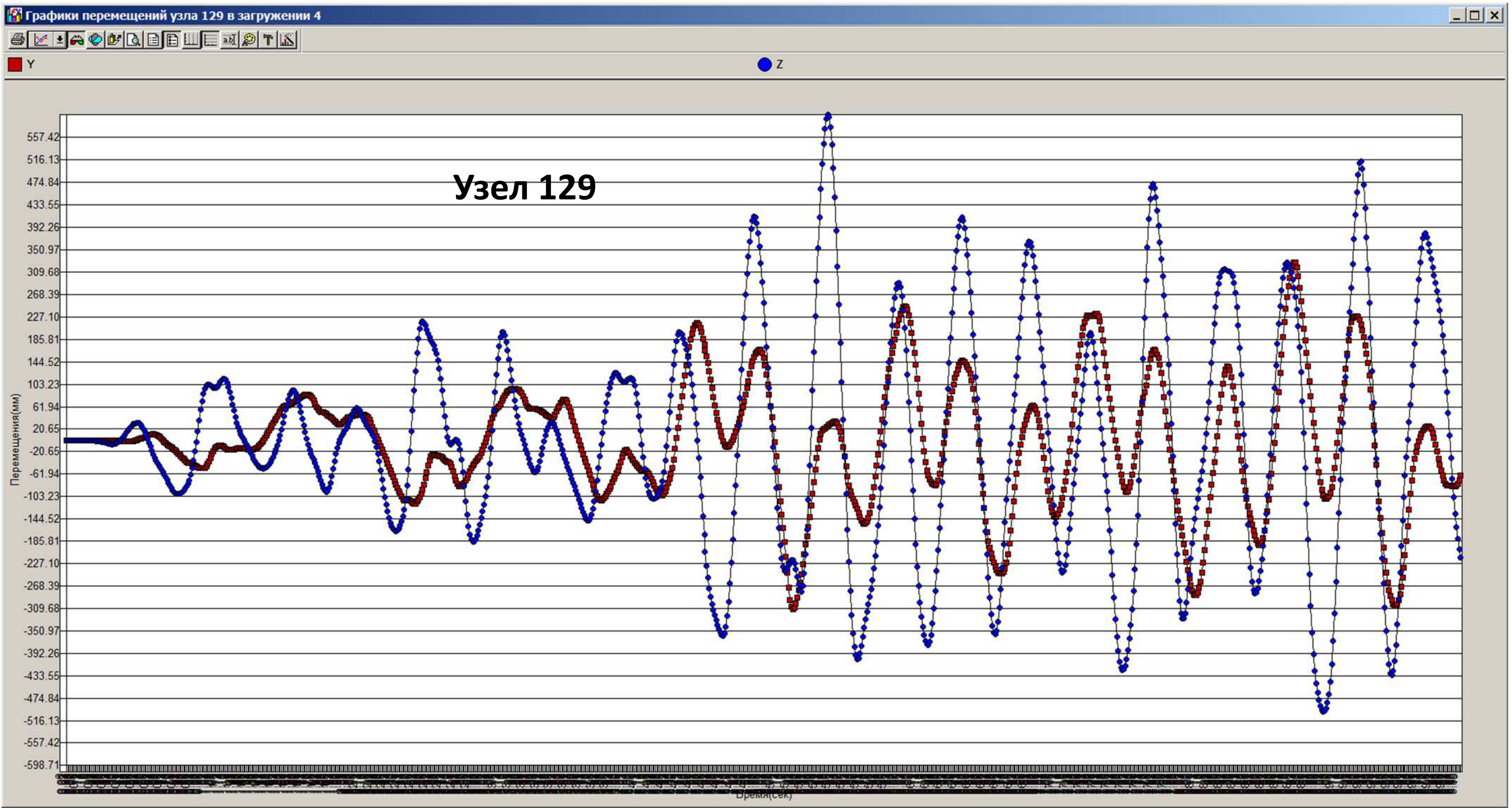
Вынужденное горизонтальное смещение правой опоры

Расчет большепролетной арки на вынужденное смещение опор

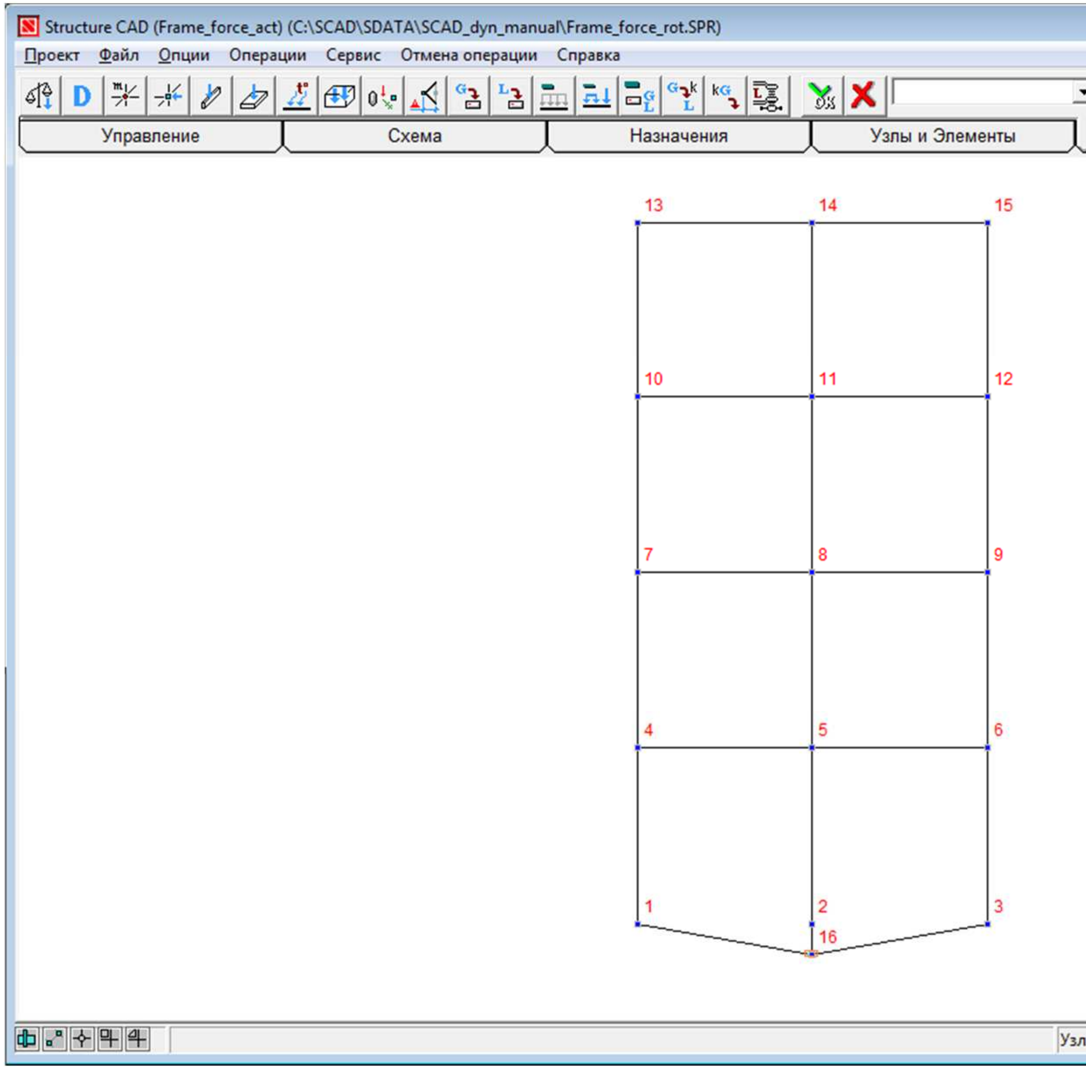


Масштабные множители 0.01 появились вследствие того, что в файле, задающем функцию времени, вынужденные перемещения представлены в см.

Расчет большепролетной арки на вынужденное смещение опор

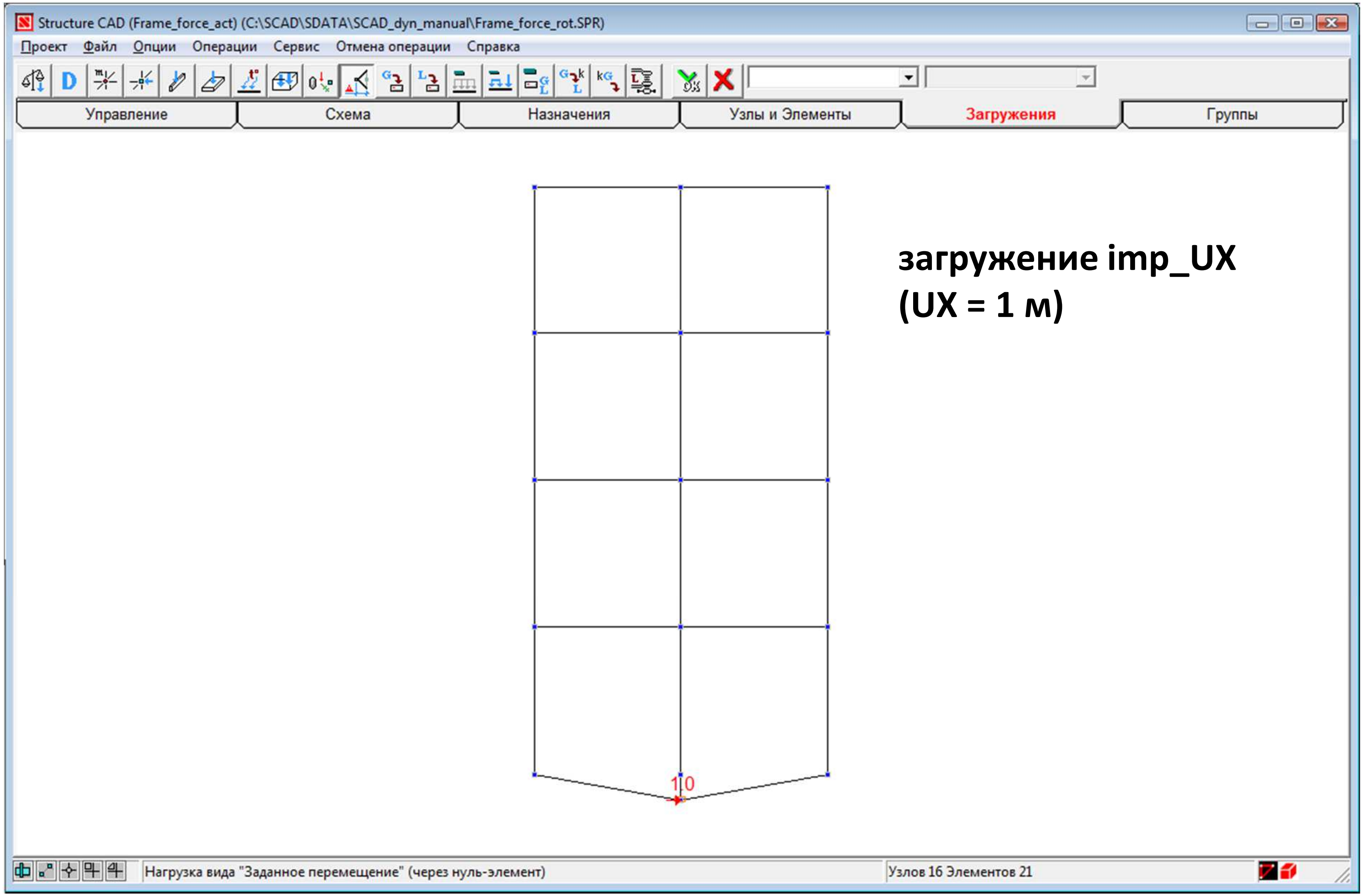


Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания

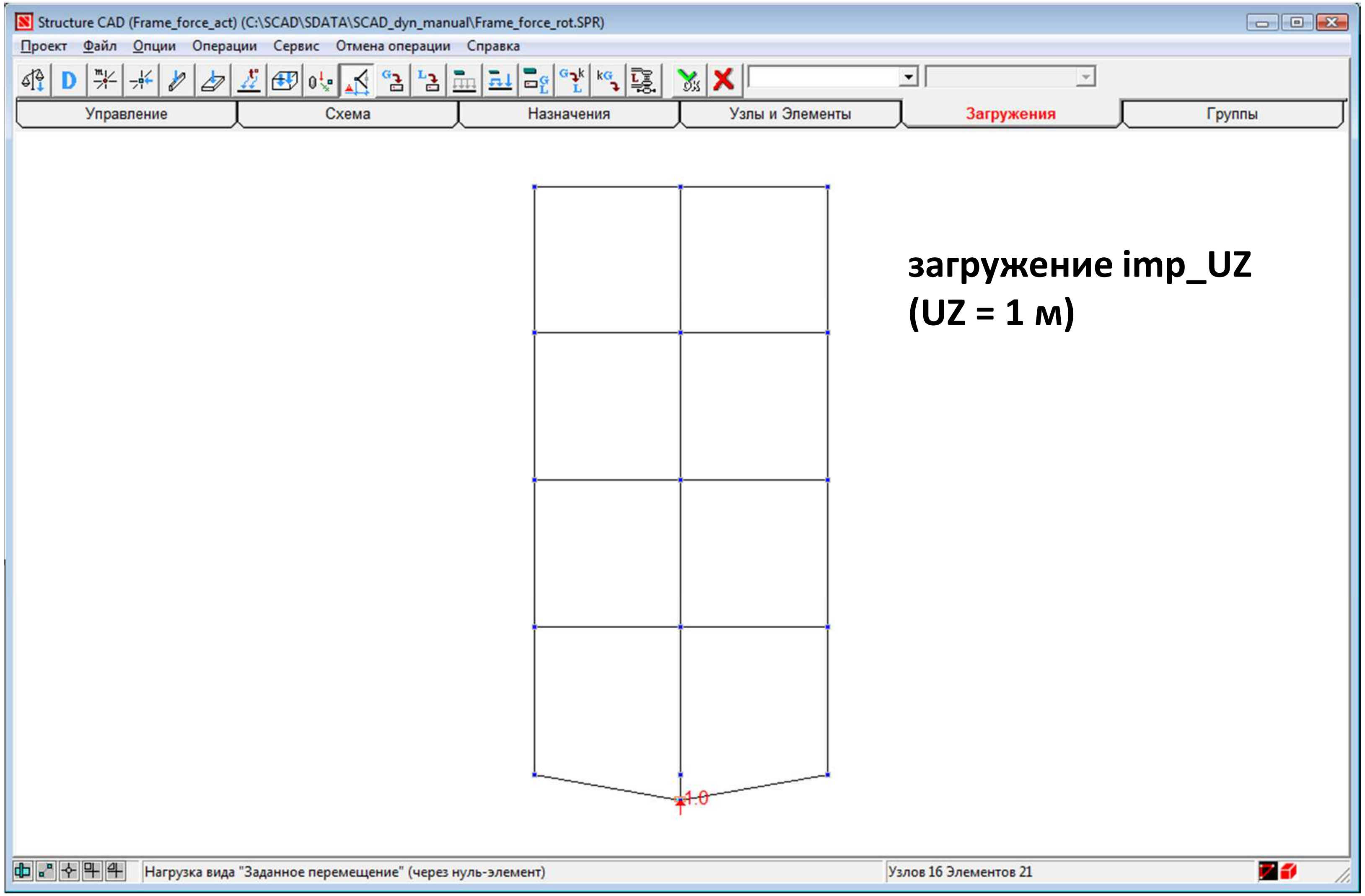


Вынужденные смещения задаются в центре приведения – узле 16. Вводим в расчетную модель жесткое тело с мастер-узлом 16 и ведомыми узлами 1, 2, 3.

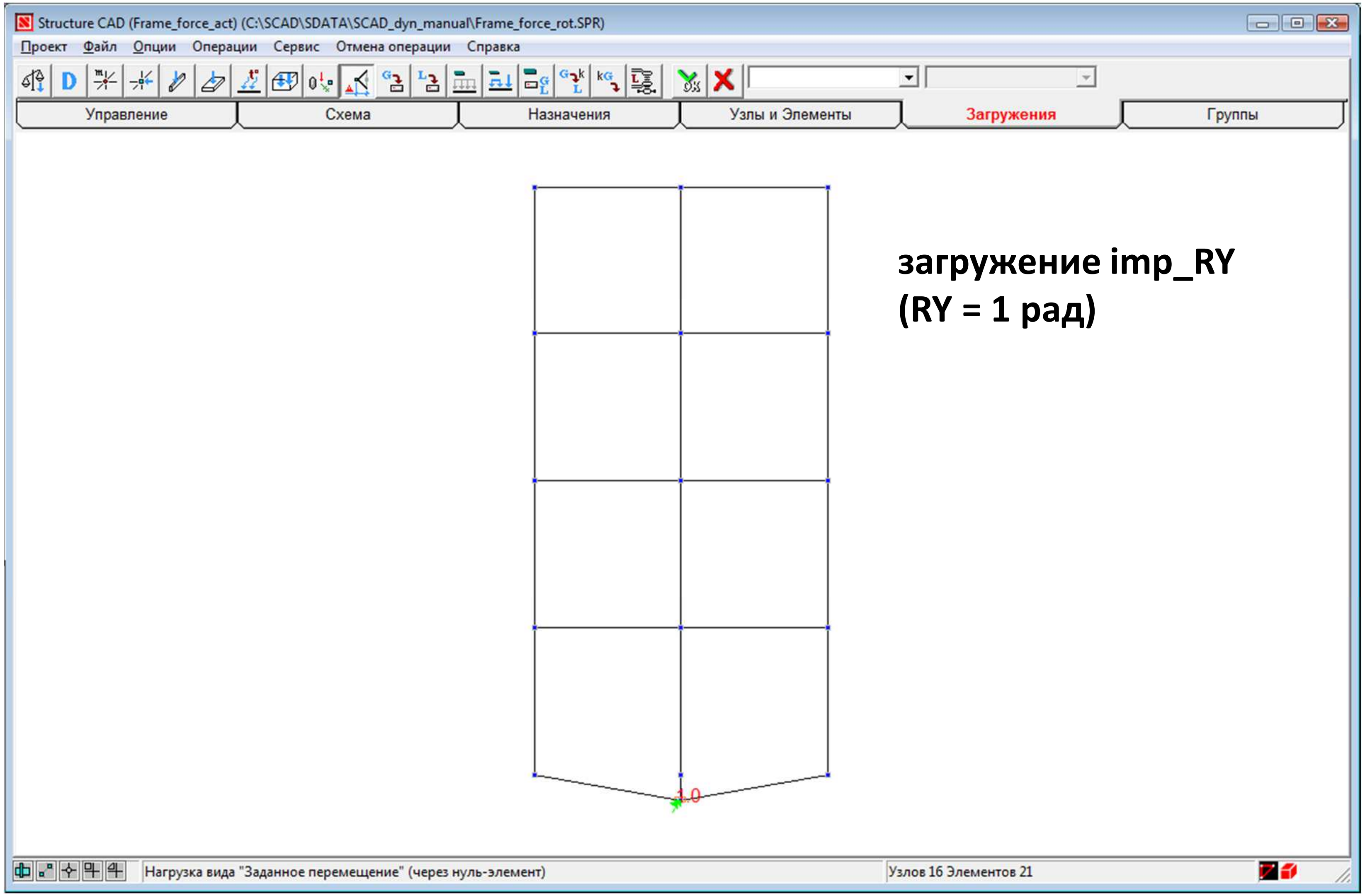
Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания



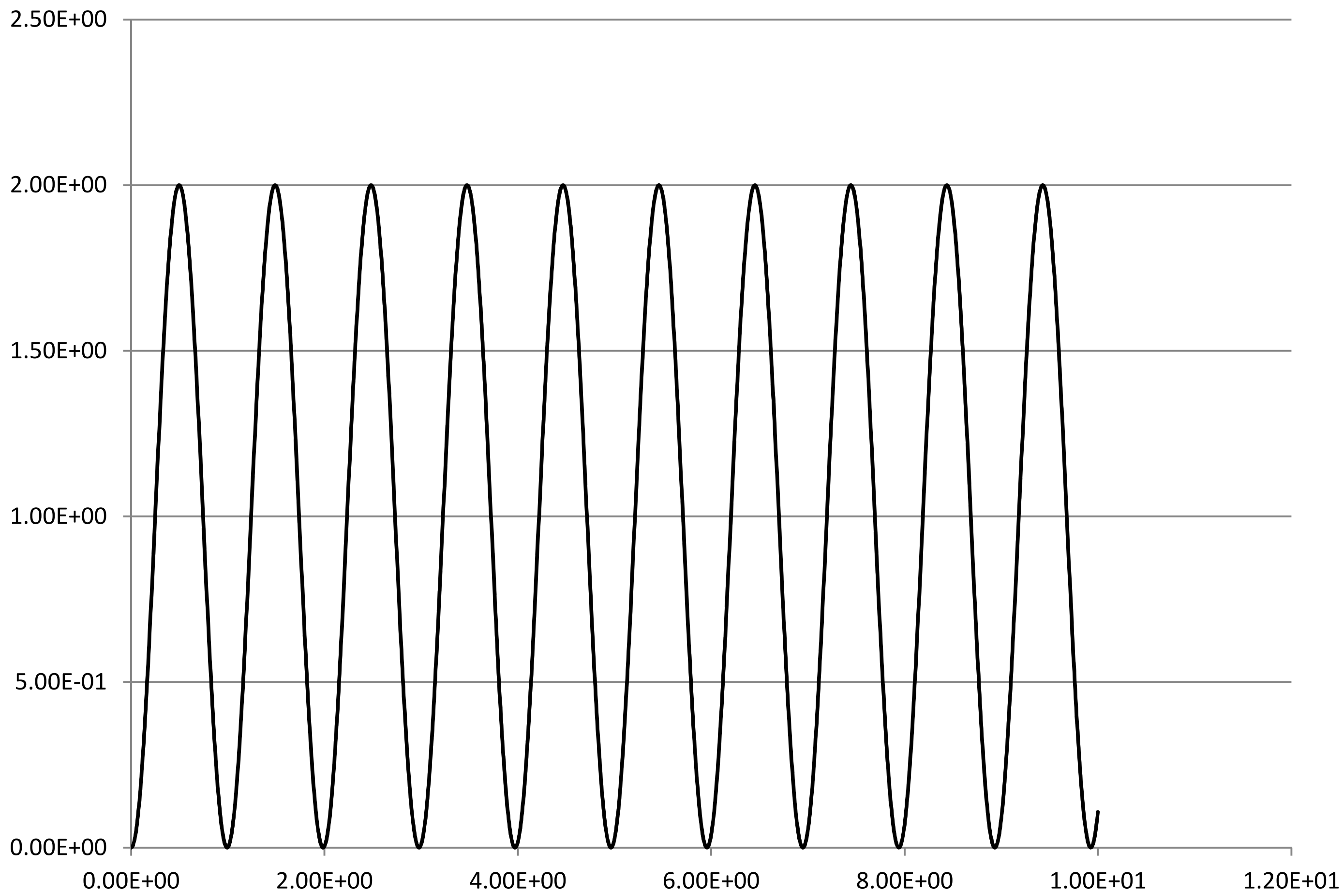
Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания



Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания

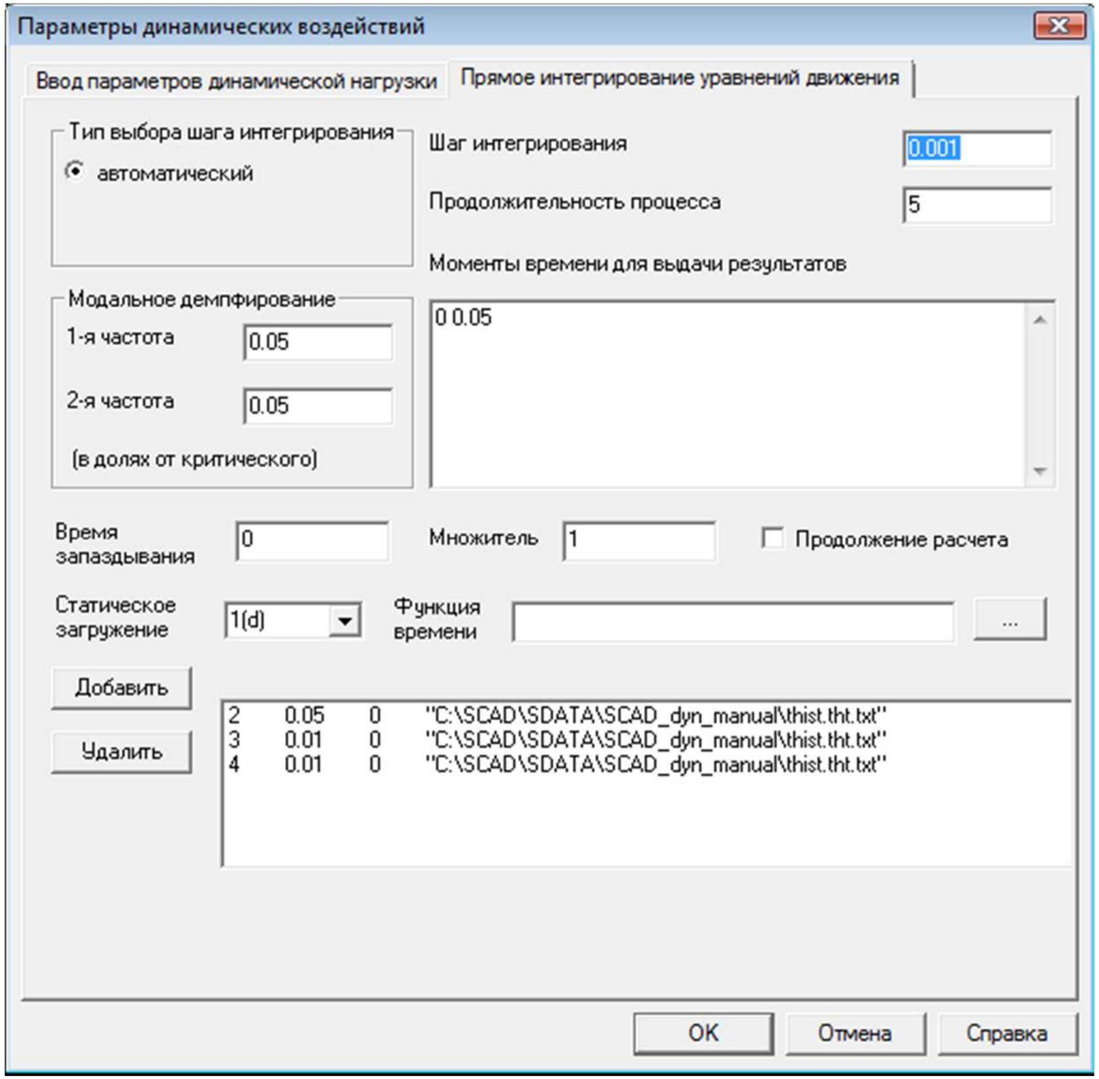


Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания

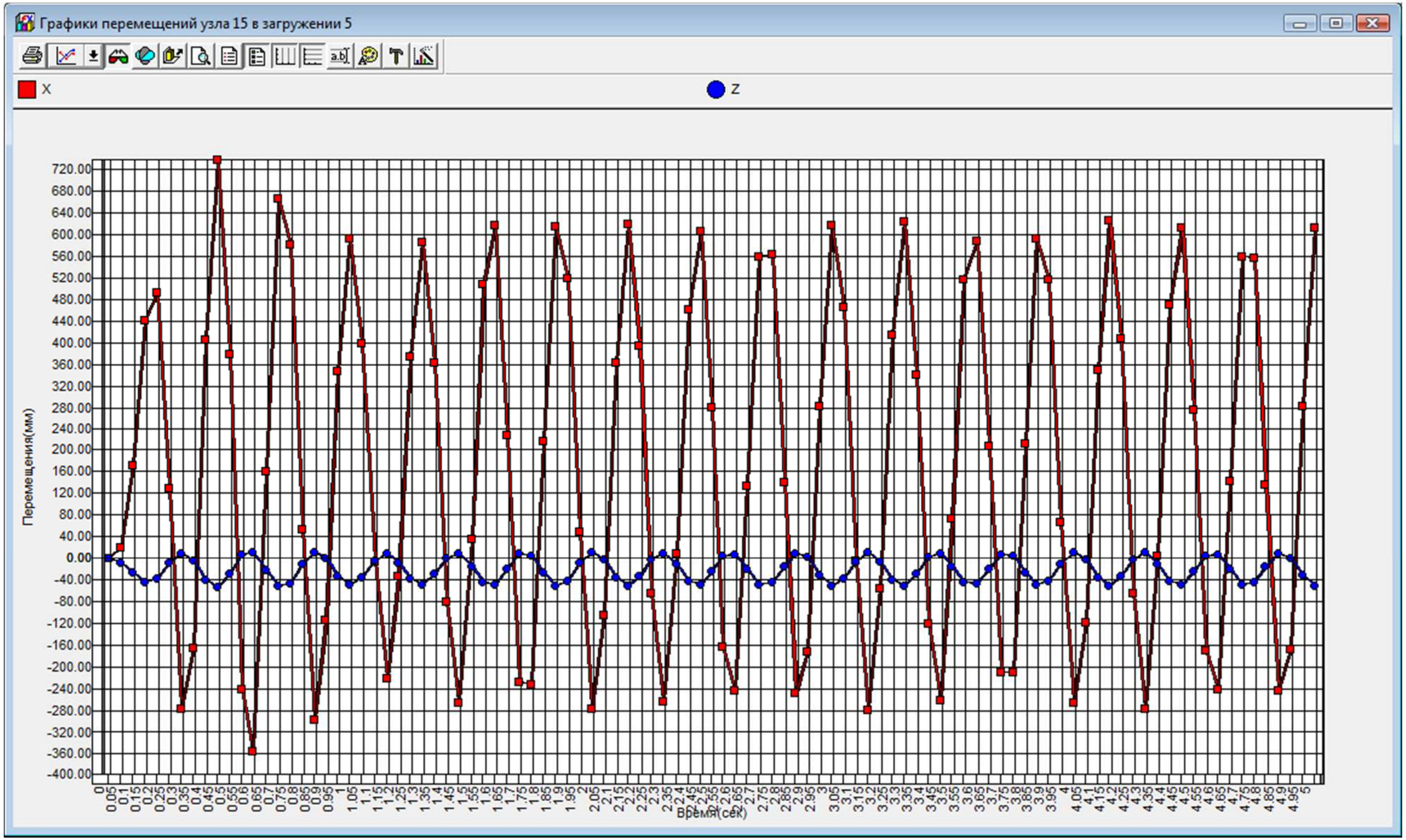


Функция времени TimeHist

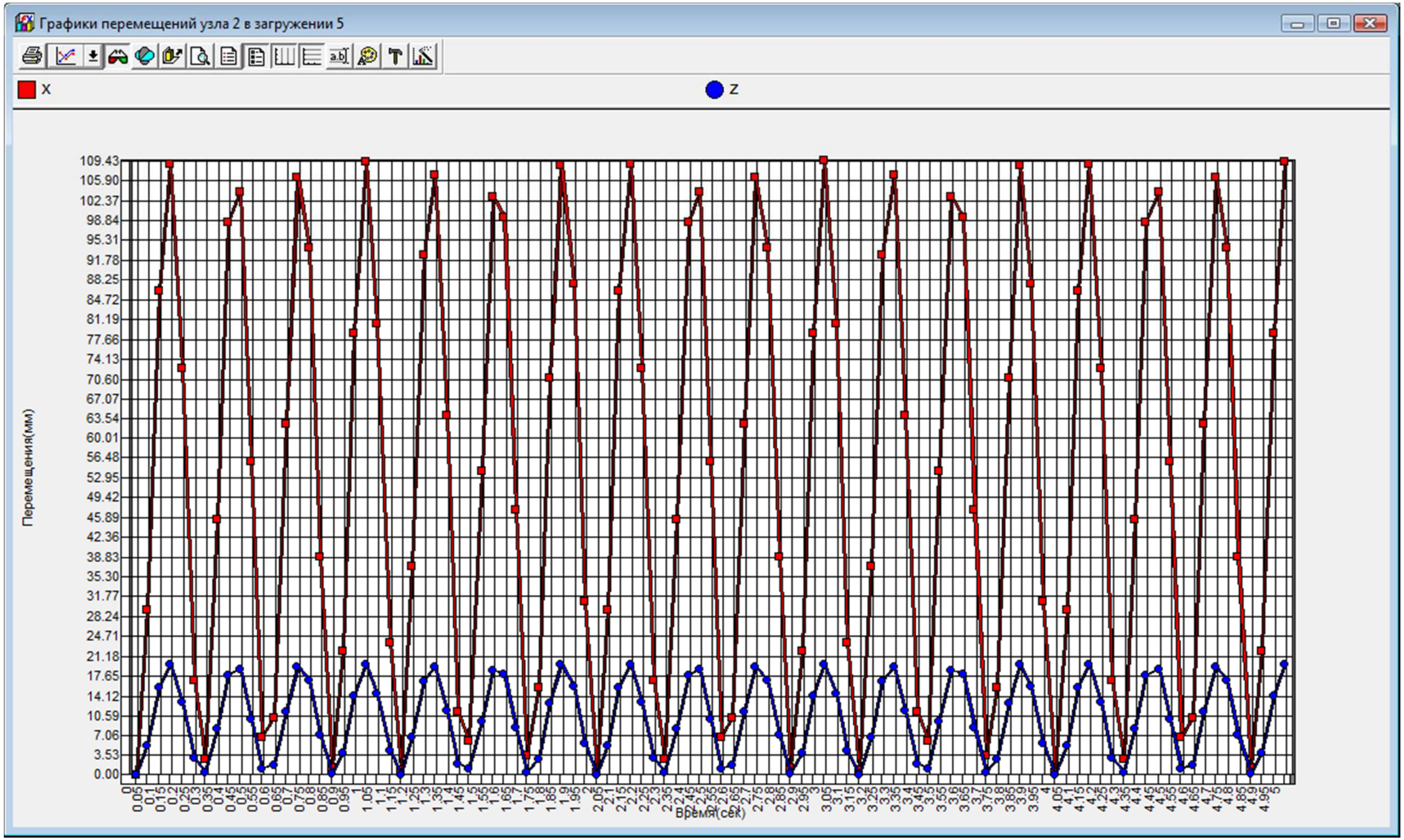
Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания



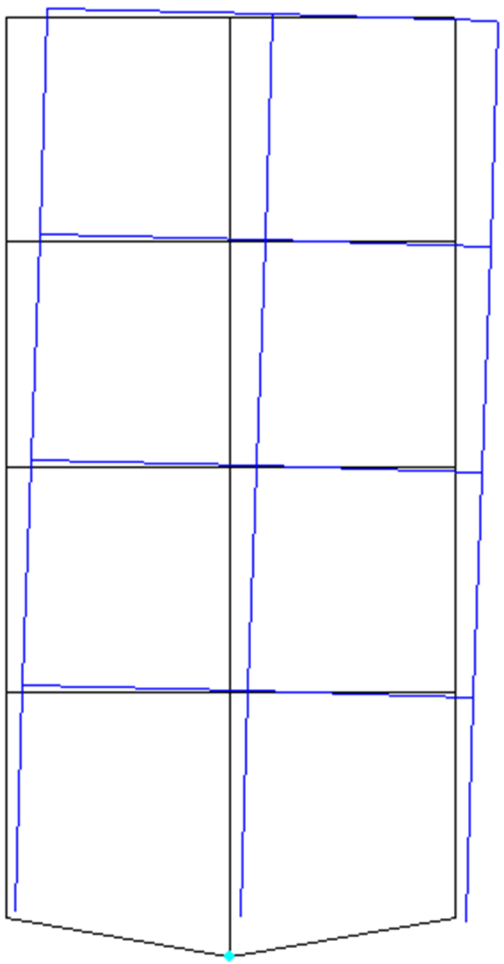
Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания



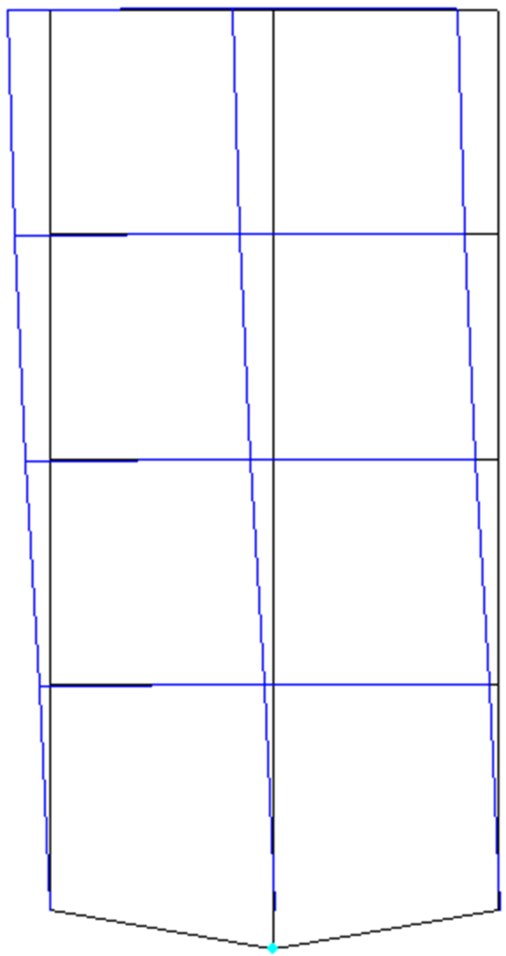
Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания



Расчет плоской рамы на сейсмическое воздействие с учетом поворотов основания



t=0.15 с



t=0.30 с

Деформированная схема в определенные моменты времени